INDICE

PARTE TERZA.

DINAMICA. PRINCIPII DI IDROMECCANICA.

CAPITOLO PRIMO.

Le tre leggi fondamentali del moto.

CAPITOLO SECONDO.

Problemi particolari sul moto di un punto.

CAPITOLO TERZO.

Il principio di d'Alembert e le equazioni generali della Dinamica.

CAPITOLO QUARTO.

Teoremi generali sul moto di un sistema.

CAPITOLO QUINTO.

Dinamica dei sistemi rigidi.

CAPITOLO SESTO.

Attrazione degli ellissoidi e teoremi generali sulla funzione potenziale newtoniana.

CAPITOLO SETTIMO.

Principî della meccanica dei fluidi o Idromeccanica.

PARTE TERZA

DINAMICA.

PRINCIPII DI IDROMECCANICA.

CAPITOLO PRIMO.

LE TRE LEGGI FONDAMENTALI DEL MOTO.

La Dinamica di un punto materiale, che svilupperemo da principio, si fonda su tre leggi, dette di NEWTON, che, considerate come semplici risultati dell'osservazione, passiamo ad enunciare ed a commentare brevemente.

§ 1. **La prima legge, o legge d'inerzia.** — *Ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto uniforme e rettilineo finchè non interviene una forza esterna* *.

---

* L'enunciato classico di NEWTON è:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare. [Phil. nat. Principia Mathematica; edizione 1723; pag. 12. La prima edizione è del 1686].

Per la storia e la critica di questo principio, noto ed

Intendiamo qui per corpo un punto materiale; cioè un corpo di dimensioni sufficientemente piccole; ed inoltre dobbiamo riferirci ad un sistema d'assi connesso colle stelle fisse.

Questa prima legge, che considera la condizione di un elemento non soggetto a forze, asserisce intanto che le cause del moto sono esterne. Occorre poi considerare in essa due parti; nella prima abbiamo la convenzione comunemente adottata per la misura del tempo. Riguardati infatti eguali i tempi durante i quali un particolare corpo, non soggetto a forze, passa per spazî eguali; ogni altro corpo, non soggetto a forze, si muoverà per spazî eguali in quei successivi intervalli di tempo durante i quali il corpo particolare si muove per spazî eguali. Il corpo scelto è la terra, la cui rotazione intorno al proprio asse si può considerare come uniforme *.

La seconda parte invece è una vera e propria legge di natura che deve essere riguardata come una verità sperimentale, perchè desunta da numerose esperienze e resa generale per via d'induzione.

---

applicato da LEONARDO DA VINCI, BENEDETTI, KEPLER, GALILEO, si consulti: MACH, *La Mécanique: Exposé historique et critique de son développement.* Paris 1904, pag. 229; in cui sono riassunti i più recenti lavori: MASCI, *Sul concetto di movimento.* [Acc. R. di Sc. Morali di Napoli, **25** (1892)].

* THOMSON a. TAIT, *Treatise on Natural Phil.*, **I**, art. 247.

Infatti si osserva che il moto di un corpo continua tanto più invariabile, quanto più si eliminano le cause perturbatrici; e tanto più si avvicina alla direzione rettilinea, quanto più è diminuita l'azione delle forze deviatrici.

§ 2. **La seconda legge del moto.** — *Il cambiamento di moto (cioè l'accelerazione) è proporzionale alla forza applicata, ed ha luogo secondo la linea retta nella quale agisce la forza* *.

Riterremo in sostanza ed in questa forma tale legge; ma per chiarirla e giungere in modo semplice al concetto di massa, prenderemo le mosse da un altro principio sperimentale, detto dei *movimenti relativi.*

Se tutti i punti di un sistema materiale hanno un movimento continuo di traslazione, e se uno di questi viene ad essere sollecitato da una nuova forza; il suo movimento, relativamente agli altri punti del sistema, è indipendente dal moto di traslazione; ed è quindi lo stesso come se il sistema fosse in riposo.

Notiamo subito alcune conseguenze di questo principio.

a) Se il sistema ha un moto di traslazione uniforme e rettilineo, una forza agente su di un

---

* *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.* NEWTON, l. c., pag. 12.

punto gl'imprimerà una certa accelerazione assoluta: l'accelerazione di strascinamento e centrifuga composta sono nulle. Quindi l'accelerazione assoluta è eguale alla relativa, cioè eguale all'accelerazione che la forza imprimerebbe al punto se il sistema fosse in riposo: dunque

L'accelerazione è indipendente dalla velocità iniziale del punto.

b) Supponiamo che su di un punto materiale P agisca una forza che all'istante t gli ha fatto acquistare un'accelerazione w.

Possiamo pensare P appartenente ad un sistema di punti materiali identici, ad ognuno dei quali sia applicata la stessa forza; di guisa che il sistema riceva un movimento continuo di traslazione. Su P, per $t = 0$, facciamo agire un'altra forza; la quale, se agisse da sola, farebbe assumere al punto l'accelerazione w' all'istante t. La w', per ciò che si è detto, non sarà altro che l'accelerazione relativa di P; w è l'accelerazione di strascinamento; quindi quella assoluta è la risultante di w e w'; cioè

Se più forze agiscono su di un punto materiale inizialmente in riposo, o avente una velocità qualsiasi; ognuna di esse produce nel corpo la stessa accelerazione che produrrebbe se avesse agito da sola sul corpo inizialmente in riposo.

Abbiamo cioè il principio dell'*indipendenza d'azione delle forze.*

c) *Un punto materiale P, inizialmente in riposo, sollecitato da una forza costante in grandezza e direzione, assume un moto rettilineo uniformemente accelerato.*

Il punto P dopo un tempo τ abbia acquistato la velocità v; dall'istante τ immaginiamo P appartenente ad un sistema di punti materiali identici dotato di un moto rettilineo ed uniforme di traslazione, di velocità v. La forza costante agirà di nuovo sul punto P all'istante τ e dopo uno stesso tempo il punto, rispetto al sistema, avrà acquistata una velocità relativa v; quindi la velocità assoluta sarà $2v$ e parallela alla v; lo stesso dicasi dopo un tempo 3τ, ... , dove τ può essere piccolo a piacere. La velocità dunque ha sempre la stessa direzione e cresce proporzionalmente al tempo: il teorema è provato.

Se il punto avesse inizialmente una velocità dello stesso senso della forza costante, la stessa conseguenza sussisterebbe; se la velocità avesse senso contrario il moto sarebbe uniformemente ritardato.

Se poi la velocità iniziale avesse una direzione qualunque, per *b*) possiamo concludere solamente che l'accelerazione è costante in grandezza e direzione (direzione della forza costante).

d) *Le accelerazioni che due punti materiali identici assumono per effetto di due forze costanti sono proporzionali alle forze.*

Se infatti le forze sono eguali, i punti, partenti dal riposo, assumono la stessa accelerazione e il loro moto è rettilineo e uniformemente accelerato; se una delle forze si raddoppia, uno dei punti assume, rispetto all'altro e dopo un tempo t, una velocità relativa eguale alla velocità assoluta dovuta alla primitiva forza. Quindi la velocità sarà doppia di quella di prima e però anche doppia l'accelerazione; e così via.

Oppure potrebbe dirsi: la forza $2f$, riunione di f ed f, produrrà una velocità doppia di quella che produce f solamente, per *b*).

L'esperienza poi dimostra che la stessa forza applicata a due corpi non identici, fa loro assumere movimenti diversi: ciò si esprime dicendo che i due corpi hanno *massa diversa.*

Se i movimenti sono identici si dice che i due corpi hanno stessa massa e si dice che un corpo ha massa doppia, tripla, ecc. di un altro se occorre una forza doppia, tripla, ecc. per produrre lo stesso movimento; cioè

Se due masse ineguali hanno lo stesso movimento, le forze costanti che le sollecitano stanno come le masse.

Vedremo fra poco come si possano misurare le masse.

e) Siano due punti materiali di masse m, m', sollecitati da due forze costanti F, F' che loro

imprimono le accelerazioni w, w'. Siano inoltre φ, φ' due altre forze costanti capaci di imprimere ai due punti la stessa accelerazione W.

Avremo:

$$F : \varphi = w : W$$
$$F' : \varphi' = w' : W;$$

inoltre
$$\varphi : \varphi' = m : m'.$$

Quindi

$$F : F' = \frac{m}{m'} \cdot \frac{w}{w'} \cdot$$

Se dunque facciamo

$$F' = m' = w' = 1,$$

risulta

$$\text{mis.}\, F = \text{mis.}\, m \times \text{mis.}\, w.$$

Una forza costante è misurata dal prodotto del numero che misura la massa e del numero che misura l'accelerazione.

Potendo finalmente considerare una forza variabile, come costante in un intervallo di tempo infinitamente piccolo, concludiamo che la stessa misura della forza è valida in ogni istante del moto; abbiamo cioè la *seconda legge di* NEWTON.

È facile osservare che una conseguenza immediata di questa legge riguarda la composizione delle forze in movimento, analoga a quella delle accelerazioni *.

---

* NEWTON, l. c., pag. 13.

§ 3. **Misura della massa di un corpo.** — Nel modo con cui nel § precedente abbiamo introdotto il concetto di massa, per paragonare tra di loro le masse di due corpi occorrerebbe paragonare due forze costanti che imprimessero loro lo stesso movimento. Ma le leggi sperimentali della caduta dei gravi in vicinanza della terra, ci dànno un mezzo assai più semplice e più rapido. Queste leggi infatti dicono che ogni corpo abbandonato nel vuoto all'azione del proprio peso, assume un moto rettilineo, secondo la verticale, uniformemente accelerato che è sempre lo stesso *; mentre dimostreremo in seguito (Cap. 2° § 8) che in una piccola regione della superficie terrestre, i movimenti si effettuano come se la terra fosse immobile e il peso del corpo restasse lo stesso.

Allora, in virtù della legge di Newton, si conclude che la forza che sollecita un grave che cade nel vuoto è costante e inoltre: le forze costanti a cui sono soggetti i gravi nel loro movimento stanno fra loro come le masse.

Se P è la forza prodotta dalla gravità cioè il peso di un corpo, di massa m; g l'accelerazione dovuta alla gravità; la legge seconda ci dà

$$P = m g.$$

* G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, ecc. 1636. Ediz. naz. **8**; giornata 3ª; pag. 200 e seg.

Si dimostra poi che le masse si misurano colla bilancia; o in altre parole:

I pesi dei vari corpi, misurati colla bilancia in uno stesso luogo, stanno fra loro come le masse.

Dalla relazione

$$F = mw,$$

risulta che fissata come unità fondamentale l'unità di massa, quella di forza è una unità derivata e reciprocamente.

Così, se si sceglie per unità di forza il peso di un grammo, in un luogo in cui l'accelerazione $g = 980$ cm., allora la massa *uno* sarebbe sollecitata da 980 unità di forza; quindi la massa unità è la massa di 980 cm^3 di acqua pura, ecc.

L'unità di massa varierebbe quindi col luogo, restando invariabile il peso. Nel sistema *c.g.s* si ovvia a questo inconveniente, perchè in esso l'unità di massa è invariabile col luogo.

Tale unità (*grammo massa*) è la massa della millesima parte del chilogrammo campione. L'unità di forza (*dine*) è quella forza continua e costante che sollecitando l'unità di massa, le imprime l'accelerazione di un cm., o, ciò che è lo stesso, le fa acquistare la velocità di un cm. dopo un secondo, partendo dal riposo. Quindi la forza che sollecita il peso di un grammo equivale a g dine; così a Roma il grammo peso equivale a dine 980, 386; cioè la dine equivale a circa la millesima parte

di un grammo. È dunque una unità assai piccola: però si suole anche considerare la *megadine* che equivale a 10^6 dine, cioè all'incirca un kg.

Notiamo finalmente che le dimensioni di una forza sono

$$[m, l, t^{-2}]$$

e l'equazione fondamentale che esprime la seconda legge di NEWTON è

$$m\ddot{P} = F - P. \tag{1}$$

§ 4. **Forze istantanee. Impulso.** — L'equazione fondamentale (1), integrata tra t_0 e t_1, dà

$$(m\dot{P})_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} (F - P)\, dt. \tag{2}$$

L'intervallo $t_1 - t_0$ sia assai piccolo ed $F - P$ sia risultante di forze che in quell'intervallo si mantengano minori di quantità finite e di altre la cui intensità sia grandissima: p. es. dell'ordine di $(t_1 - t_0)^{-1}$.

Le prime (dette genericamente *continue*) non producono variazioni finite nella velocità di P; l'integrale del secondo membro della (2) relativo alle seconde ha un valor finito; quindi queste seconde forze producono una variazione finita, un brusco cambiamento, nella velocità del punto. Ma avendosi sempre

$$m\dot{P} < A$$

(con A finito), risulta

$$(m P)_{t_0}^{t_1} < A(t_1 - t_0) < \varepsilon$$

con ε arbitrariamente piccolo; cioè il punto, nello stesso intervallo di tempo, non subisce che spostamenti infinitamente piccoli.

Si dice, in tal caso, che all'istante t_0 ha agito sul mobile una *forza istantanea o una percossa;* rappresentata dal limite, per $t_1 = t_0$, del vettore

$$\int_{t_0}^{t_1} (F - P)\, d\, t.$$

Tale forza, per la (2), ha per misura *il prodotto della massa per il modulo del vettore che rappresenta il cambiamento di velocità;* le sue dimensioni sono

$$[m,\ l,\ t^{-1}];$$

cioè la forza istantanea può essere considerata come *il prodotto di una forza continua per il tempo.*

Cognita, all'istante t_0, tale forza, conosceremo la velocità allo stesso istante; a partire da questo la solita legge fondamentale determinerà (§ 6) il moto successivo, fino a che non intervengano altre percosse.

Possiamo ora interpretare il vettore $m\dot{P}$. Consideriamo un punto materiale mobile liberamente sulla propria traiettoria; sulla quale, all'istante t, occupi la posizione P ed abbia la velocità v.

In P pensiamo un elemento materiale identico al primo ed in riposo. Diremo *impulso* del punto al tempo t quella forza istantanea capace di far assumere, in quell'istante, al mobile fittizio in ri-

poso la velocità v del mobile reale. Poichè in tal caso la variazione di velocità del mobile fittizio è rappresentata dalla velocità del mobile reale; così indicando con $\mathfrak{J} - P$ l'impulso, avremo

$$\mathfrak{J} - P = m\dot{P}. \tag{3}$$

Il vettore impulso è eguale al prodotto della massa per la velocità.

La grandezza del vettore impulso dicesi anche *quantità di moto* del mobile. L'equazione fondamentale (1), può quindi scriversi:

$$F - P = \frac{d(\mathfrak{J} - P)}{dt}$$

cioè

$$d(\mathfrak{J} - P) = (F - P)\,dt. \tag{4}$$

Se $F - P$ è nullo (e quindi il moto è rettilineo ed uniforme) si ha $\mathfrak{J} - P =$ cost.; le prime due leggi fondamentali del moto si possono, dopo ciò, enunciare in questa forma:

Se su di un punto materiale non agiscono forze, l'impulso è costante.

Se su di un punto materiale agiscono forze continue, la variazione dell'impulso è, in ogni istante, eguale alla forza istantanea originata dalla forza applicata.

Con quest'ultima locuzione abbreviata non si vuol esprimere altro che il prodotto dell'elemento del tempo pel vettore $F - P$.

§ 5. **La terza legge del moto.** — *Ad ogni*

azione corrisponde sempre una reazione eguale e contraria; ossia, le azioni mutue di due corpi qualunque sono sempre eguali e dirette in senso contrario *.

Mentre le due prime leggi ci dànno il mezzo di misurare una forza e quindi (come vedremo) di investigare il moto di un punto materiale soggetto a date forze; questa terza legge ci abiliterà a trattare casi assai più complicati di moto, nei quali specialmente occorre considerare più corpi e le attrazioni e pressioni che tra loro si esercitano. La legge, già largamente applicata in Statica, viene osservata ripetutamente: dai più grandi fenomeni astronomici ai più semplici e volgari fatti terrestri; così se un corpo preme o spinge un altro, esso è premuto o spinto da questo con una forza eguale e di direzione contraria; se nell'interno di un corpo le azioni tra molecola e molecola non si facessero continuamente equilibrio, due a due distruggendosi, nessun corpo resterebbe in equilibrio; ecc.

§ 6. **Equazioni del moto di un punto libero.** — Se P è un punto mobile di massa m, soggetto ad

* *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.* [NEWTON, l. c., pag. 13].

Vedi pure THOMSON a. TAIT, l. c., art. 260-261.

Per la storia e la critica di questa legge, il cui enunciato chiaro e preciso è dovuto interamente a NEWTON, vedi MACH, l. c., pag. 194 e seg.

una forza $F - P$, la seconda legge del moto, che si traduce nella equazione (1), permette di trovare la forza che sollecita il punto, quando è cognito il moto. Di più essa riconduce il problema inverso, cioè la determinazione del moto cognita la forza, ad un problema di Cinematica: conoscere il moto, data l'accelerazione.

Se x, y, z sono le coordinate di P rispetto ad una terna d'assi fissi ed X, Y, Z, le componenti della forza, la (1) equivale alle

$$(5) \qquad m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z,$$

che diconsi le *equazioni differenziali del moto di un punto libero* *.

In tutti i casi che si presentano in natura, la forza (e quindi le sue componenti) dipende dalla posizione del punto, dalla sua velocità e dal tempo; cioè è funzione di $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Quindi le (5) sono tre equazioni differenziali simultanee del secondo ordine. Il problema proposto equivarrà dunque alla ricerca delle tre funzioni x, y, z di t, cioè alla integrazione delle (5).

Se le X, Y, Z sono funzioni analitiche dei loro argomenti, e regolari in un certo intorno; e inoltre sono date la posizione e la velocità ini-

---

* Considerate per la prima volta da MACLAURIN: *A complete Treatise on Fluxions*, art. 465, 469 e 884 (1742). Ci riferiamo alla traduzione francese di PEZENAS (1749).

ziale del mobile; esistono tre funzioni x, y, z del tempo t che soddisfano le (5) e per $t = 0$, esse e le loro derivate prime sono rispettivamente eguali a funzioni note $x_0, \dots \dot{x}_0, \dots$ *.

La integrazione del sistema (5) dipende da quella di un'unica equazione differenziale del 6° ordine; basta infatti derivare le tre equazioni quattro volte di seguito e poi eliminare, tra le quindici equazioni così ottenute, y e z e le loro derivate fino al sesto ordine. Ma non si hanno metodi generali nè per formare l'equazione del 6° ordine, nè, tanto meno, per integrare le (5). Immaginando effettuata tale integrazione, le $x, y, \dots \dot{z}$, si esprimono per il tempo e sei costanti, univocamente determinate dalle condizioni iniziali.

Alle (5) possono a volte utilmente sostituirsi le così dette *equazioni intrinseche* del moto.

Decomponiamo la $F - P$ nelle sue componenti secondo la tangente, la normale principale e la binormale alla traiettoria. Rammentando la (7) del Vol. 1°, pag. 34, avremo

$$(6) \qquad F_t = m\dot{v}, \quad F_n = \frac{m v^2}{\rho}, \quad F_b = 0,$$

dette appunto equazioni intrinseche del moto **.

---

* Teorema di esistenza di CAUCHY. Vedi PICARD, *Traité d'Analyse*, **2**, pag. 308 e seg.

** EULER, *Mechanica sive motus scientia*: 1736.

Se la forza è costante in direzione, sarà pure costante la direzione dell' accelerazione; e però (Vol. 1°, pag. 40) la traiettoria è piana. Il moto del punto in direzione normale alla forza è rettilineo ed uniforme, e parallelamente alla forza, assunta come asse z, è definito dalla sola equazione

$$(7) \qquad m\ddot{z} = Z(z, \dot{z}, t).$$

In tal caso la determinazione del moto dipende dalla integrazione di una equazione differenziale del secondo ordine; se la velocità iniziale ha la direzione della forza, la traiettoria è rettilinea. Notiamo poi che se Z dipende solamente da z, o da $\dot{z}$, o da t, l'integrazione della (7) si riconduce alle quadrature.

§ 7. **Moto verticale di un grave in un mezzo resistente.** — Un corpo di forma sferica si muove in un mezzo resistente, p. es., l'aria, che esercita normalmente, su tutta la superficie del corpo, una resistenza funzione della velocità. Se la sfera ha un semplice moto di traslazione, e quindi i suoi punti hanno un moto rettilineo, ed in ogni istante, la stessa velocità, le resistenze dei vari elementi della superficie si compongono in una unica, applicata al centro della sfera ed opposta al moto. Per velocità non superiori a 200 m. al secondo, si può ammettere sia proporzionale al quadrato della velocità e quindi della forma $C\rho_1 v^2$; dove C è una costante (diversa da un mezzo ad un altro),

ρ_1 è la densità del mezzo. Il peso della sfera, in virtù del principio d'ARCHIMEDE, è

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\rho - \rho_1)g;$$

dove a è il raggio, ρ la densità della sfera. Tale peso è una forza che penseremo applicata al centro della sfera, in cui possiamo immaginare concentrata tutta la massa (Cap. 4, § 7).

Finalmente è da osservare che la massa del grave in moto in un mezzo resistente è maggiore di quella allo stato di riposo, di una frazione p del volume del fluido spostato; cioè

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho + p\rho_1) \text{ *}.$$

Se dunque assumiamo l'asse z verticale, positivo verso il basso, si ha:

$$\ddot{z} = g\frac{\rho - \rho_1}{\rho + p\rho_1} \pm \frac{3}{4}\frac{C\rho_1}{\pi a^3(\rho + p\rho_1)}v^2;$$

terremo il segno $+$ se si tratta di moto ascendente; il segno $-$ pel moto discendente. Posto

$$g' = g\frac{\rho - \rho_1}{\rho + p\rho_1}, \quad k^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3 g}{C}\frac{\rho - \rho_1}{\rho_1},$$

otteniamo

$$\ddot{z} = g'\left(1 \pm \frac{v^2}{k^2}\right).$$

* DU BUAT, *Principes d'Hydraulique*, **2**, pag. 229 (1786). BESSEL, *Astron. Nachrich*, (1828). BAILY, *Phil. Trans.* (1832), pag. 399. Vedi ancora: MOSSOTTI, *Lezioni di Mecc. raz.*, pag. 184, Firenze 1851.

Abbiamo un'equazione del tipo (7), in cui la forza dipende dalla sola velocità. Nel caso del moto discendente, se $\dot{z} = v < k$, ponendo $\dot{z} = k \operatorname{Th} u$, risulta

$$u = \frac{g'}{k}(t + \tau)$$

$$\dot{z} = k \operatorname{Th} \frac{g'}{k}(t + \tau);$$

$\dot{z}$ cresce costantemente restando sempre minore di k, a cui converge per t infinitamente grande. Il moto è accelerato e tende a mano a mano a diventare uniforme. La velocità iniziale è

$$v_0 = k \operatorname{Th} \frac{g'\tau}{k};$$

se fosse $v_0 = k$, sarebbe $\tau = \infty$ e quindi costantemente $\dot{z} = v_0$; il moto sarebbe uniforme.

Se fosse invece $\dot{z} > k$, basterebbe porre:

$$\dot{z} = k : \operatorname{Th} u,$$

allora $\dot{z}$ decrescerebbe continuamente tendendo verso k.

Nel caso poi del moto ascendente avremo

$$\dot{z} = k \operatorname{tang} \frac{g'}{k}(t + \tau).$$

Con una nuova integrazione si ottiene z mediante t; e nei due casi

$$z = \text{cost.} + \frac{k^2}{g'} \log \operatorname{Ch} \frac{g'}{k}(t + \tau);$$

$$z = \text{cost.} + \frac{k^2}{g'} \log \cos \frac{g'}{k}(t + \tau).$$

Occorrendo una relazione tra z e v, basta notare che

$$\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dz},$$

onde

$$g'dz = \frac{v\,dv}{1 \pm \frac{v^2}{k^2}};$$

$$\frac{2g'z}{k^2} = \pm \log \frac{1 \pm \frac{v^2}{k^2}}{1 \pm \frac{v_0^2}{k^2}}.$$

L'altezza a cui giunge il mobile nel caso dell'ascesa si ottiene ponendo $v = 0$ e si ha

$$z_0 = -\frac{k^2}{2g'}\log\left(1 + \frac{v_0^2}{k^2}\right).$$

Se $v_0 = 0$, è pure $\tau = 0$; le formule per la discesa diventano

$$v = k\,\mathrm{Th}\frac{g't}{k}, \quad z = \frac{k^2}{g'}\log \mathrm{Ch}\frac{g't}{k};$$

od anche, posto $\frac{g't}{k} = u$,

$$v = g't\frac{\mathrm{Th}\,u}{u}, \quad z = g't^2\frac{\log \mathrm{Ch}\,u}{u^2}.$$

Nel vuoto $\rho_1 = 0$, $g' = g$; k tende all'infinito ed u a zero. Passando al limite, nelle espressioni precedenti, si hanno le note formule

$$v = gt, \quad z = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Un grave lanciato verticalmente nel vuoto con velocità v_0 giunge ad un'altezza data da

$$v_0^2 : 2g = \text{cm. } 5{,}1 \,.\, v_0^2$$

in un tempo eguale a

$$v_0 : g = 10{,}2 \,.\, v_0 ,$$

La resistenza dell'aria ha più influenza sull'altezza che sulla durata *.

§ 8. **Moto di un punto attratto da un centro fisso in ragion inversa del quadrato della distanza.** — Se la velocità iniziale del mobile è nulla, oppure è diretta verso il centro fisso O, il moto avverrà sulla congiungente O colla posizione iniziale, che assumeremo come asse z. La forza è quindi espressa da $-mk^2 : z^2$ e la (7) diventa

$$\ddot{z} = -\frac{k^2}{z^2},$$

in cui il secondo membro è funzione della sola z.

Si ha

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz};$$

integrando :

$$\dot{z}^2 = h + \frac{2k^2}{z}.$$

Inoltre

$$v_0^2 = h + \frac{2k^2}{z_0}.$$

* Questo problema, anche nel caso più generale di una resistenza della forma $av + bv^2$, è trattato da Newton, l. c., lib. secondo, p. 245.

Estraendo la radice; osservando che se il mobile è lanciato verso O, z decresce col crescere di t, si conclude che dovremo tenere il segno $-$; nel caso contrario terremo il segno $+$. Occorre poi distinguere tre casi:

$h \geqq 0$; la velocità non si annulla mai e decresce continuamente; il mobile si allontana sempre da O ed il suo moto tende a diventare uniforme.

$h < 0$; poniamo

$$h = -\frac{2k^2}{\alpha};$$

cioè

$$v_0^2 = 2k^2\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\alpha}\right),$$

e quindi

$$\alpha \geqq z_0.$$

Da z_0 sino ad α, la z cresce col tempo ed il mobile si allontana da O; la sua velocità decresce sempre fino ad annullarsi in un punto A (di ascissa α); avanti il radicale si terrà il segno $+$.

Il mobile giunge in A in un tempo finito; infatti da

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2k^2}{z} - \frac{2k^2}{\alpha}}$$

si trae

$$t = \sqrt{\frac{\alpha}{2k^2}} \int_0^x \frac{\sqrt{z}\, dz}{\sqrt{\alpha - z}},$$

e l'integrale è finito per $z = \alpha$. La quadratura si

effettua agevolmente ponendo

$$z = \alpha \operatorname{sen}^2 u.$$

Dal valore di t per cui $z = \alpha$, il moto cambia senso; avanti al radicale si terrà il segno meno.

§ 9. Moto dei proiettili lanciati nel vuoto o in un mezzo resistente.

a) Tratteremo uno dei casi più classici di moto curvilineo, cominciando dal moto di un grave lanciato nel vuoto. Immagineremo ancor qui il grave ridotto ad un punto (centro di massa) in cui è concentrata tutta la massa ed applicato il peso. L'asse z sia la verticale del luogo positiva verso l'alto e prescindiamo, per ora, dalla rotazione della terra. Sappiamo già (Vol. 1°, pag. 40) che la trajettoria è una parabola coll'asse verticale e colla concavità volta in basso. Basta osservare, del resto, che il moto del punto secondo l'orizzontale è uniforme e secondo la verticale uniformemente accelerato *. Se v_0 è la velocità iniziale inclinata di un angolo α sull'orizzonte, abbiamo subito

$$x = at, \quad z = bt - \frac{1}{2} g t^2, \quad a = v_0 \cos\alpha, \quad b = v_0 \operatorname{sen}\alpha.$$

Eliminando t si ottiene l'equazione della parabola

$$z = -\frac{g}{2a^2} x^2 + \frac{b}{a} x,$$

---

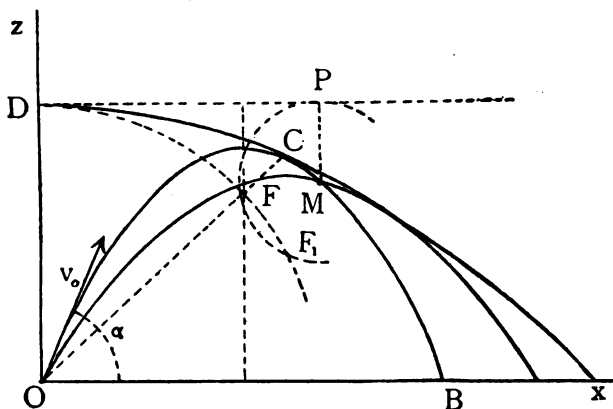
* GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, ecc. Ediz. naz. **8**. Giorn. Quarta, p. 268.

equivalente a

$$\left(x - \frac{ab}{g}\right)^2 = - \frac{2a^2}{g}\left(z - \frac{b^2}{2g}\right).$$

Però le coordinate x_1, z_1 del vertice ed il parametro p della parabola sono

$$x_1 = \frac{ab}{g}, \quad z_1 = \frac{b^2}{2g}, \quad p = \frac{a^2}{g}.$$

Il tratto OB (Fig. 1) dicesi *gittata del tiro* ed è

(Fig. 1)

espresso da

$$\frac{2ab}{g} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha;$$

è massimo per $\alpha = 45°$. La direttrice, di equazione

$$z = z_1 + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g},$$

è parallela ad x da cui dista dell'altezza cui perverrebbe un grave lanciato verticalmente in O con velocità v_0. Il fuoco F della parabola è tale che $OF = OD$ e inoltre sono eguali i due angoli DOv_0 e v_0OF; quindi F si determina agevolmente. Si conclude che le varie trajettorie paraboliche corrispondenti ad una stessa velocità iniziale e a diverse inclinazioni, hanno la stessa direttrice e i fuochi sono su di un cerchio.

Posto $u = \operatorname{tang} \alpha$, l'equazione della traiettoria diventa

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + u^2)x^2 + ux,$$

e l'inviluppo delle parabole corrispondenti ai vari valori di u si ottiene eliminando u tra la precedente equazione e la sua derivata

$$0 = x - \frac{gx^2}{v_0^2}u.$$

Quindi otteniamo

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g};$$

cioè una nuova parabola di cui z è l'asse, D il vertice e O il fuoco; è detta *parabola di sicurezza.*

Si cerchi l'angolo sotto cui bisogna lanciare il mobile, con velocità v_0, per colpire un dato punto $M(\xi, \zeta)$; dovremo avere

$$\zeta = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + u^2)\xi^2 + u\xi;$$

equazione di secondo grado in u, che darà due valori reali, coincidenti o immaginari di u (e quindi di α) secondo che

$$\frac{2g\xi^2}{v_0^2}\left[\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}\xi^2-\zeta\right]\gtreqless 0.$$

I due valori sono coincidenti e reali se M giace sulla parabola di sicurezza; chè in tal caso

$$\zeta=-\frac{g}{2v_0^2}\xi^2+\frac{v_0^2}{2g}.$$

Per i punti esterni, se ξ rimane la stessa, ζ cresce; mentre decresce per quelli interni; però u è immaginario per i punti esterni; reale per gl'interni.

Se MP è la distanza di M dalla direttrice comune, il cerchio di centro M e raggio MP taglierà il cerchio OD nei due fuochi F, F_1 delle due parabole.

Se $\alpha_1 < \alpha_2$ sono i due angoli reali, poichè

$$\xi = t v_0 \cos\alpha,$$

al più piccolo dei due angoli corrisponderà il tempo minore.

Si può finalmente osservare che la OF prolungata passa pel punto di contatto C della parabola col suo inviluppo, e quindi la tangente comune essendo egualmente inclinata su OF e OD è normale alla direzione di v_0. Se facciamo variare infinitamente poco l'angolo α otterremo una nuova parabola che incontrerà la prima in un punto infinitamente prossimo a C e che quindi differirà

infinitamente poco dalla primitiva traiettoria nel tratto da O a C; mentre da questo punto in poi le due traiettorie (e i moti dei due mobili) differiranno sempre più col crescere di t. Si dice che il moto è *stabile* nel primo dei suddetti tratti; *instabile* nell'altro *.

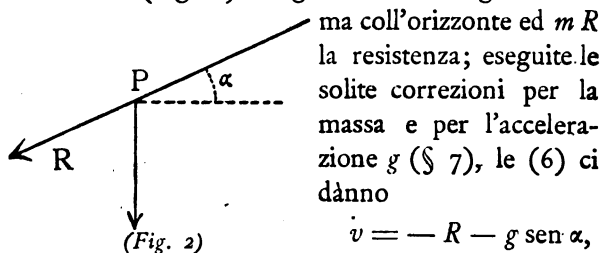
b) Passiamo ora al caso del moto in un mezzo resistente.

Supporremo che la risultante di tutte le resistenze che il mezzo esercita sulla superficie del corpo sia applicata al centro di massa, tangente alla traiettoria di questo e diretta in senso contrario al moto. L'accelerazione del mobile è sempre contenuta in un piano verticale; il piano osculatore è sempre verticale e quindi la traiettoria è ancora contenuta in un piano verticale. Possiamo opportunamente valerci delle equazioni intrinseche del moto.

Sia α (Fig. 2) l'angolo che la tangente forma coll'orizzonte ed $m\,R$ la resistenza; eseguite le solite correzioni per la massa e per l'accelerazione g (§ 7), le (6) ci dànno

(Fig. 2)

$$\dot{v} = -R - g \operatorname{sen} \alpha,$$

---

* THOMSON a. TAIT, l. c., I, pag. 421.

$$\frac{v^2}{\rho} = g \cos \alpha.$$

Ma

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{v\,dt}{d\alpha};$$

perchè è da osservare che la risultante di R e del peso è situata secondo le z negative rispetto alla tangente; la curva volge la concavità in basso, e quindi α, da un valore iniziale α_0, decresce fino alla sommità, in cui è nullo e seguita poi a decrescere indefinitamente. Dunque

$$v\frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha; \tag{8}$$

ed eliminando il tempo, otteniamo

$$\cos \alpha \frac{dv}{d\alpha} - v \operatorname{sen} \alpha = \frac{R}{g} v; \tag{9}$$

integrata la quale otterremo una relazione tra v ed α. Se $\frac{R}{g}$, che in generale dipende dalla sola v, è della forma

$$a + b v^n,$$

l'equazione precedente diventa una equazione di Bernoulli, la cui integrazione si riduce alle quadrature. Infatti si ha:

$$\cos \alpha \frac{dv}{d\alpha} - (a + \operatorname{sen} \alpha) v = b v^{n+1}$$

e colla sostituzione

$$w = v^{-n}$$

diventa

$$\frac{dw}{d\alpha} + \frac{n(a + \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha} w = -\frac{nb}{\cos \alpha};$$

equazione lineare del primo ordine; integrando, poichè

$$n\int \frac{a + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} d\alpha = -\log\left[\operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos^n\alpha\right],$$

si ottiene:

$$\frac{1}{v^n} = Cq - nbq\int \frac{d\alpha}{q\cos\alpha},$$

dove

$$q = \cos^n \alpha \operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Le costanti a, b, n siano positive; inoltre se il grave è abbandonato senza velocità iniziale, la resistenza è data da mga che dovremo supporre minore del peso mg; dunque $a < 1$.

Per $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, q tende a zero;

$$-nbq\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{q\cos\alpha}$$

ha per limite:

$$-nb\frac{1}{q\cos\alpha} : -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\alpha} = \frac{nb}{\cos\alpha} : \frac{d\log q}{d\alpha}.$$

Ma

$$\frac{d\log q}{d\alpha} = -\frac{n(a + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha},$$

dunque tale limite è $b:(1-a)$; però v^n, e quindi

v, ha un limite finito. Da (8) si deduce

$$g t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v\, d\alpha}{\cos\alpha},$$

e poichè la funzione da integrare per $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ diventa infinita di primo ordine, concludiamo che il tempo impiegato a raggiungere il valore $-\frac{\pi}{2}$ è infinito. Infine, osservando che

$$\frac{dx}{dt} = v \cos\alpha, \quad \frac{dz}{dt} = v \operatorname{sen}\alpha$$

e quindi

$$g x = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\, d\alpha, \quad g z = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tang}\alpha\, d\alpha.$$

risulta che col tendere di α a $-\frac{\pi}{2}$, la x tende ad un limite finito, mentre z cresce indefinitamente. Dunque

La traiettoria ha un assintoto verticale; col crescere del tempo il moto tende a diventare uniforme.

Nel caso, particolarmente interessante, di $a = 0$, si può più speditamente procedere così.

Posto

$$u = v \cos\alpha, \quad \frac{R}{g} = b v^n, \quad (n \neq 0)$$

la (9) ci dà subito

$$\frac{du}{d\alpha} = b \left(\frac{u}{\cos\alpha} \right)^{n+1}$$

donde

$$\frac{1}{u^n} - \frac{1}{u_0^n} = -nb\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{(\cos\alpha)^{n+1}};$$

e, se poniamo

$$p = \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\frac{1}{u^n} - \frac{1}{u_0^n} = -nb\int (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp;$$

quindi, successivamente

$$g t = -\int u\, dp,$$

$$g x = -\int u^2 dp, \quad g z = -\int u^2 p\, dp.$$

Tutto dipende dalla ricerca di

$$\int (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp,$$

pel quale si può stabilire facilmente una formula di riduzione, mentre l'integrale stesso si calcola subito per $n = 1, 2, 3$.

Per $n = 1$, p. es., v risulta una funzione razionale di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ e però tutte le restanti quadrature possono effettuarsi *.

---

* Anche questo problema, nel caso della resistenza proporzionale a v o a v^2, è stato trattato da NEWTON, loc. cit., Lib. 2°. GIOV. BERNOULLI (*Acta eruditorum Lips.*, 1719, pag. 216) considerò $R \equiv v^n$. La trattazione più completa è dovuta a D'ALEMBERT [*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744), pag. 359], il quale diè quattro forme di R (e tra queste $a + bv^n$) in cui la integrazione della (9) si

Esercizi.

1. Moto di un punto attratto da un centro fisso proporzionalmente alla distanza e abbandonato senza velocità iniziale.

Il moto avrà luogo sulla congiungente il centro colla posizione iniziale del mobile; l'accelerazione è proporzionale alla distanza ed il moto è armonico (Vol. 1°, pag. 45).

2. In un moto rettilineo la forza è funzione della sola distanza; determinarla in modo che il moto risulti tautocrono.

Si ha

$$\ddot{z} = \dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz} = \frac{1}{2}\varphi'(z)$$

avendo rappresentato l'intensità della forza con $\frac{1}{2}\varphi'(z)$; se alla distanza z_0 è $v = 0$, si ha

---

può ridurre alle quadrature. Il caso di $a + bv^n$ fu ancora trattato da LEGENDRE, *Mém. de l'Ac. de Berlin* (1782), p. 59 e da JACOBI, Gesam. Werke, **4**, p. 287. Altri casi d'integrabilità della (9) sono stati assegnati dal Prof. SIACCI [Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences; mai 1901; Rivista d'Artig. e Genio, **3**, **4**, (1901)].

Per la discussione completa del problema e le esperienze sulle varie resistenze occorre confrontare i trattati di Balistica. Tra le più importanti esperienze citeremo solo quelle inglesi di BASHFORTH dal 1865 al 1880 e quelle di MAYEVSKI (1872). Per basse ed altissime velocità la resistenza varia all'incirca come v^2; ma per velocità intermedie (tra 280 e 415 m. al secondo) può variare come il cubo o come la sesta potenza.

$$\dot{z}^2 = \varphi(z) - \varphi(z_0) = u - u_0;$$

donde posto $z = \psi(u), \quad u = u_0 w,$

risulta

$$t = \int_0^1 \frac{\sqrt{u_0}\,\psi'(u_0 w)}{\sqrt{1-w}}\,dw.$$

Il moto dicesi tautocrono se t è indipendente da z_0 e quindi da u_0; quindi $\sqrt{u_0}\,\psi'(u_0 w)$ è indipendente da u_0, cioè

$$\sqrt{u_0 w}\,\psi'(u_0 w) = \sqrt{w}\,\psi'(w) = \text{cost.};$$

integrando $z = \psi(u) = 2c\sqrt{u} + c'$

e se u si annulla per $z = 0$,

sarà $$z = 2c\sqrt{u}, \quad u = \varphi(z) = \frac{z^2}{4c^2} = k^2 z^2.$$

La forza è proporzionale alla distanza e $t = \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}$.

3. Moto rettilineo di un punto attratto da un centro fisso proporzionalmente alla distanza, in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità.

Si ha

$$\ddot{z} - h^2\dot{z} + k^2 z = 0,$$

equazione del 2° ordine a coefficienti costanti. Integrando e dette α, β le radici dell'equazione caratteristica si ha

$$z = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}, \quad v = A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}.$$

Se alla distanza z_0 è $v = 0$, risulta

$$(\alpha - \beta) z = z_0(\alpha e^{\beta t} - \beta e^{\alpha t});$$

il tempo impiegato a percorrere il tratto da z_0 all'origine è indipendente da z_0.

4. La determinazione del moto di un punto pesante in un mezzo la cui resistenza è $g(a+b\log v)$ si riconduce alle quadrature.

L'equazione (9), posto $u = \log v$, diventa

$$\cos\alpha \frac{du}{d\alpha} - bu = a + \operatorname{sen}\alpha$$

lineare; onde ecc.

5. Una forza è parallela ad una direzione fissa (asse z) ed ha intensità eguale a

$$\mu(ax + by + cz + d)^{-3}, \text{ o, } \mu(ax^2 + bx + c)^{-\frac{3}{2}}.$$

Trovare la traiettoria.

La traiettoria è piana; il moto secondo x è uniforme: però

$$\dot{x} = \alpha, \quad \ddot{z} = \alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

L'equazione differenziale della traiettoria, nel piano zx, è

$$\alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = \mu(ax + cz + d)^{-3}.$$

Posto $u = ax + cz + d$ si ha

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \mu_1 u^{-3}$$

ed integrando

$$x + c_2 = \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1(ax + cz + d)^2 - \mu_1},$$

che rappresenta una conica.

Nell'altro caso si deve integrare la

$$\alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = \mu(ax^2 + bx + c)^{-\frac{3}{2}}.$$

donde

$$\alpha^2 \frac{dz}{dx} = \frac{2\mu}{4ac - b^2} \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}}} + c_1$$

ed infine

$$\alpha^2 z = \frac{2\mu}{4ac - b^2}\sqrt{ax^2 + bx + c} + c_1 x + c_2$$

che pure rappresenta una conica.

6. Moto rettilineo di due punti che si attraggono proporzionalmente alla distanza.

Abbiamo

$$\ddot{z} = k^2(z_1 - z), \quad \ddot{z}_1 = k_1^2(z - z_1);$$

e posto $k^2 + k_1^2 = \alpha^2, \quad z - z_1 = u,$

risulterà $k_1^2 \ddot{z} + k^2 \ddot{z}_1 = 0$

e di seguito

$$z - z_1 = A \cos \alpha t + B \operatorname{sen} \alpha t$$

$$k_1^2 z + k^2 z_1 = Ct + D.$$

Se i mobili partono dal riposo e le distanze iniziali sono a, a_1:

$$z - z_1 = (a - a_1) \cos \alpha t, \quad k_1^2 z + k^2 z_1 = k_1^2 a + k^2 a_1.$$

Dopo un tempo $t = \dfrac{\pi}{2\alpha}$, i mobili s'incontrano nel punto

$$z = \frac{k_1^2 a + k^2 a_1}{k^2 + k_1^2}.$$

7. Moto rettilineo d'un punto attratto da due centri fissi in ragion inversa del quadrato della distanza.

I due centri siano O ed A; avremo

$$\ddot{z} = -\frac{k^2}{z^2} \pm \frac{k_1^2}{(a - z)^2},$$

secondo che P è tra O ed A o esterno al segmento OA.

Essendo $\ddot{z} = v \dfrac{dv}{dz}$, detta v_0 la velocità alla distanza z_0 da O, si ha

$$v^2 = v_0^2 + 2k^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) + 2k_1^2\left(\frac{1}{a - z} - \frac{1}{a - z_0}\right).$$

Vediamo se v può annullarsi; occorre discutere (col metodo di ROLLE) una equazione di 2° grado. Eguagliando a zero la semiderivata di v^2 (che è l'espressione della forza) si ha una equazione la cui radice è

$$z_1 = \frac{a k}{k + k_1}, \quad a - z_1 = \frac{a k_1}{k + k_1}.$$

A tal valore corrisponde una posizione P_1 di equilibrio instabile. Inoltre v^2 è infinito positivo per $z = 0$ e $z = a$. Se quindi nel punto z_1 il valore di v^2 è positivo, cioè

$$(\alpha) \quad v_0^2 - 2\left(\frac{k^2}{z_0} + \frac{k_1^2}{a - z_0}\right) + \frac{2}{a}(k + k_1)^2 > 0,$$

l'equazione non ha radici reali comprese tra 0 ed a. Il mobile, lanciato verso P_1, supera questa posizione e cade in A. Se l'espressione precedente è negativa, abbiamo una radice reale tra O e P_1 ed un'altra tra P_1 ed A.

La prima può cadere tra O e P_0 o tra P_0 e P_1; in questo secondo caso il mobile non raggiunge P_1, ecc. Se finalmente il primo membro della (α) è nullo il mobile giunge in P_1 con velocità nulla; ma poichè

$$v^2 = \dot{z}^2 = \frac{2(k + k_1)^2 (z - z_1)^2}{a z (a - z)}$$

vi giungerà dopo un tempo infinito.

(SAINT-GERMAIN, l. c., pag. 194).

8. Moto di un punto soggetto ad una forza normale ad una retta fissa e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Se la retta fissa è l'asse z, il moto secondo z è uniforme e sul piano $x y$ si riduce ad un moto centrale già considerato in Cinematica (Vol. 1°, pag. 43).

Se la velocità iniziale è parallela a z il moto avviene in un piano; quindi

$$\ddot{x} = -\frac{k^2}{x^2}, \quad \ddot{z} = 0,$$

donde

$$\dot{x} = k\sqrt{\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}}, \quad \dot{z} = c$$

l'equazione differenziale della traiettoria è

$$\frac{dx}{dz} = \frac{k}{c\sqrt{x_0}} \sqrt{\frac{x - x_0}{x}}\ ; \text{ ecc.}$$

9. Paragonare le equazioni dell'equilibrio di un filo, con quelle del moto di un punto libero.

La (1) può scriversi

$$\frac{F - P}{mv} - \frac{d(vT)}{ds} = 0$$

e confrontata colla (3) (Vol. 1°, pag. 246), ci dice subito: la traiettoria di un mobile soggetto alla forza $F - P$ e la curva di equilibrio di un filo soggetto alla forza $-\frac{1}{mv}(F - P)$, sono le stesse: velocità e tensione si corrispondono;

la curva di equilibrio di un filo soggetto alla forza $F - P$ e la traiettoria di un mobile soggetto alla forza $-m(F - P)\tau$, sono le stesse. Così un punto materiale soggetto ad una forza verticale e proporzionale alla velocità, descrive una catenaria.

10. Un punto pesante è soggetto ad una forza tangenziale in modo che la velocità resta costante. Studiare il moto.

Procedendo come al § 9 si ha

$$R + g \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad v\frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha, \quad v = a;$$

quindi

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{g}{a^2}, \quad \alpha = \alpha_0 - \frac{gx}{a^2};$$

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang}\left(\alpha_0 - \frac{gx}{a^2}\right);$$

$$z = \frac{a^2}{g} \log \frac{\cos\left(\alpha_0 - \frac{gx}{a^2}\right)}{\cos \alpha_0}.$$

La z cresce fino a che $x = \frac{a^2 \alpha_0}{g}$, in cui diventa mas-

sima; poi decresce sempre e per $x = \frac{a^2}{g}\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, diventa infinita; per $x = \frac{a^2 \alpha_0}{g} \pm x_1$, z assume valori eguali e si annulla per $x = \frac{2a^2}{g}\alpha_0$.

CAPITOLO SECONDO.

PROBLEMI PARTICOLARI SUL MOTO DI UN PUNTO.

§ 1. **Moto di un punto vincolato.** — Nel prossimo capitolo tratteremo l'argomento assai generalmente; qui ci limitiamo ad osservare che se il punto è mobile su di una superficie o curva levigata, colla considerazione della reazione normale R della superficie (curva) e colla applicazione della seconda legge di NEWTON, otteniamo

$$m\ddot{P} = F - P + Rn, \tag{1}$$

n essendo un vettore unità parallelo alla normale alla superficie.

Quindi immaginando riferita la superficie

$$f(x, y, z) = 0$$

ad una terna d'assi ortogonali, da (1) deduciamo

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2}$$

L'integrazione di questo sistema, colla eliminazione di λ, si riconduce a quella di una equazione differenziale del quarto ordine.

Invece per una curva definita dalle due equazioni

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

si ha:

$$(3) \qquad m\ddot{x} = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \text{ ecc.}$$

Supponiamo la superficie o la curva fissa, cioè indipendente dal tempo; la n risulta normale alla direzione del moto e però proiettando sulla tangente, dalla (1) deduciamo

$$(4) \qquad m\frac{dv}{dt} = F_t.$$

Nel caso poi del moto su di una curva fissa, alla precedente possiamo aggiungere queste due altre, ottenute proiettando sulla normale principale e sulla binormale:

$$(5) \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b;$$

che insieme colla (4) costituiscono le *equazioni intrinseche del moto.*

Riguardo alla integrazione dei sistemi (2) e (3) (vedi Cap. 3°, § 1), dobbiamo sin da ora notare un caso particolare notevolissimo e che dovremo in seguito sviluppare (Cap. 4° § 1).

La superficie (la curva) sia fissa e le forze ammettano una funzione potenziale U (Vol. 1°, pag. 253); allora

$$(6) \qquad F_t = -\frac{dU}{ds};$$

la (4) ci dà

$$mv\frac{dv}{ds}+\frac{dU}{ds}=0$$

ed integrando

(7) $$mv^2+2U=h;$$

che è un integrale primo delle equazioni del moto, detto *integrale delle forze vive*. Quando le circostanze suddette si presentano nel moto di un punto su di una curva, l'integrale precedente basta per la completa determinazione del moto. Infatti la posizione del punto sulla curva e la sua velocità sono funzioni di un unico parametro q, come p. es. l'arco, e della sua derivata; la (7) si trasforma in una equazione differenziale di 1° ordine, che, con una quadratura, ci dà q mediante t.

Nel caso di un punto pesante, colle solite convenzioni:

(8) $$U=mgz;$$

il problema è riducibile alle quadrature.

Rammentando quanto fu stabilito altrove (Volume 1°, pag. 254) si deduce ancora che se nel moto di un punto libero la forza esterna incontra un asse (p. es. l'asse z), ha luogo l'integrale

(9) $$m(x\dot{y}-\dot{x}y)=c;$$

il quale avrà pure luogo nel moto di un punto su di una superficie, se questa è di rotazione intorno z.

Ciò premesso passeremo a sviluppare una serie di problemi assai importanti sul moto di un punto

libero o obbligato a restare su di una superficie o curva levigata.

§ 2. **Moto relativo di due punti che si attraggono con una forza proporzionale alle masse e funzione della distanza.** — Il punto P di massa m è attratto da O (di massa *uno*) con una forza $mf(r)$; però l'accelerazione assoluta di P, diretta da P verso O è eguale ad $f(r)$. Invece O è attratto da P con una forza eguale e contraria $mf(r)$; però l'accelerazione di O è espressa da $mf(r)$ ed è diretta da O verso P. Se ora riferiamo il moto di P ad un sistema rigidamente connesso con O, l'accelerazione relativa di P rispetto O, è eguale a quella assoluta e a quella di strascinamento volta in senso contrario: onde l'accelerazione di P è $(1 + m)f(r)$. Posto $1 + m = \mu$, possiamo dunque riguardare O come fisso e P soggetto ad una forza diretta verso O e la cui intensità è $\mu f(r)$.

Dalla Cinematica sappiamo che la traiettoria relativa è contenuta in un piano passante per O; che l'area descritta dal raggio vettore a partire dalla sua posizione iniziale cresce proporzionalmente al tempo. Se quindi O è il polo delle coordinate polari r, θ, si ha

$$r^2 \dot{\theta} = c. \tag{10}$$

La costante $\frac{1}{2} c$ esprime l'area descritta dal raggio in un secondo.

Inoltre abbiamo

$$F_t = \mu f(r) \frac{dr}{ds};$$

però posto

$$(11) \qquad U = -\mu \int f(r)\, dr = -\mu \varphi(r),$$

l'integrale (7) ci dà

$$(12) \qquad v^2 = h + 2\mu \varphi(r).$$

I due integrali (10) e (12) bastano a ricondurre il problema alle quadrature. Infatti

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = c^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right],$$

quindi da (12)

$$(13) \quad c^2 \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 = h + 2\mu\varphi(r) - \frac{c^2}{r^2} = \psi(r).$$

Separando le variabili, abbiamo l'equazione differenziale della traiettoria

$$d\theta = \pm \frac{c\, dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}.$$

Inoltre

$$\dot{r} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{\psi(r)},$$

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}};$$

con una nuova quadratura otterremo una relazione tra r e t.

Abbiamo introdotte quattro costanti arbitrarie che si determineranno mediante le condizioni iniziali.

Per decidere del segno da tenere avanti al radicale, osserviamo che, essendo data la velocità iniziale, sarà determinato il segno di $\dot{r}$ (velocità secondo il raggio vettore) per $t = 0$: però è noto il segno da assumere per $t = 0$, che conserveremo fino a raggiungere quel valore di r che annulla $\psi(r)$.

Se $\psi(r_0) = 0$, cioè la velocità iniziale normale al raggio vettore, è $\dot{r} = 0$; allora dobbiamo valerci del valore di $\ddot{r}$, che è dato da

$$\ddot{r} = \mu f(r) + \frac{c^2}{r^3};$$

se esso è positivo, per $t = 0$, r è un minimo e quindi r cresce col tempo e il radicale deve essere assunto col segno $+$; se invece è $\ddot{r}$ (per $t = 0$) negativo, il radicale sarà assunto col segno $-$. Finalmente se anche $\ddot{r}$ fosse nullo, per $t = 0$, tutte le derivate di r sarebbero nulle; r è costante ed abbiamo il moto uniforme su di un cerchio.

I punti in cui r è normale alla traiettoria e quindi massimo o minimo, diconsi *apsidi*. Si può mostrare che la traiettoria è simmetrica rispetto ad ogni linea *apsidale*. Infatti a partire da un apside A $\left(\text{in cui } \frac{dr}{d\theta} = 0\right)$ da una parte e dall'altra con-

sideriamo due angoli eguali [e tali che $\psi(r) \neq 0$] e limitati dai raggi vettori a ed r ed a ed r_1. Si ha

$$\theta = \pm c \int_a^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}, \quad \theta = \mp c \int_a^{r_1} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}};$$

quindi

$$\int_r^{r_1} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}} = 0$$

e in conseguenza $r = r_1$.

Supponiamo ad esempio che la forza vari in ragion inversa del quadrato della distanza; cioè

$$f(r) = -\frac{1}{r^2};$$

avremo successivamente:

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}, \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

$$\psi(r) = \frac{2\mu}{r} + h - \frac{c^2}{r^2} = h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2;$$

$$d\theta = \pm c \, . \, d\frac{1}{r} : \sqrt{h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2}.$$

Integrando:

$$\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c} = \sqrt{h + \frac{\mu^2}{c^2}} \cos(\theta - \theta_0),$$

donde

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)};$$

dove

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e^2 = 1 + \frac{h c^2}{\mu^2}.$$

La traiettoria è una conica di cui O è un fuoco, ed è una iperbole, parabola od ellissi secondo che $h \gtreqless 0$.

Se il raggio vettore iniziale r_0 è normale alla traiettoria e diciamo v_0 la velocità iniziale, ω_0 la velocità angolare, si ha:

$$v_0 = r_0 \omega_0, \quad c = r_0^2 \omega_0, \quad h = r_0^2 \omega_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

e però

$$e^2 = \left(\frac{r_0^3 \omega_0^2}{\mu} - 1 \right)^2.$$

La conica è iperbole, parabola od ellissi secondo che

$$r_0^3 \omega_0^2 \gtreqless 2\mu.$$

Se la forza fosse ripulsiva, dovremmo cambiare il segno di μ; il valore assoluto di e risultando maggiore di uno, la conica è una iperbole.

Diciamo a il semiasse maggiore della conica riferita agli assi; sarà

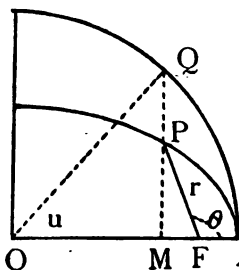
$$a = \pm \frac{p}{1 - e^2} = \mp \frac{\mu}{h},$$

quindi

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} \mp \frac{1}{a} \right)$$

per l'ellissi ed iperbole; mentre per la parabola

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

Per esprimere r e θ in funzione di t, limitiamoci a considerare il moto ellittico. Sia A (Fig. 3) un estremo dell'asse maggiore, F il fuoco; descrivasi un cerchio di raggio OA e da P si conduca la normale all'asse che seghi il cerchio in Q; l'angolo $QOA = u$ dicesi *anomalia eccentrica*. Le coordinate di P, rispetto ad assi paralleli ai coordinati coll'origine nel fuoco, siano x_1, y_1; cioè

(Fig. 3)

$$x_1 = -ae + a\cos u, \quad y_1 = b \operatorname{sen} u,$$

$$x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1 = ab(\dot{u} - e\cos u \,.\, \dot{u}) = c;$$

onde

$$\frac{c}{ab} t = nt = u - e \operatorname{sen} u$$

dove

$$n = \frac{c}{ab}, \quad n^2 = \frac{\mu}{a^3},$$

poichè

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{b^2}{a}.$$

L'equazione precedente (detta di KEPLER) permette di dedurre inversamente u mediante t per mezzo di una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di e. Se poi x è l'ascissa OM di P, si ha

$$r = a - ex = a(1 - e\cos u)$$

che esprime r per u; inoltre;

$$\cos\theta = \frac{x - ae}{a - ex}; \quad 1 \mp \cos\theta = \frac{(1 \pm e)(a \mp x)}{r},$$

donde, per divisione,

$$\tang\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{u}{2}.$$

§ 3. **Moto dei pianeti intorno al sole.** — Le tre leggi che regolano il moto dei pianeti, supposti ridotti ai loro centri di massa, intorno al sole, e che prendono nome dal loro scopritore KEPLER, sono:

a) *la traiettoria di un pianeta è una ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi;*

b) *le aree descritte dal raggio vettore crescono proporzionalmente al tempo* *;

c) *i quadrati dei tempi delle rivoluzioni periodiche stanno fra loro come i cubi dei grandi assi* **.

Queste leggi permisero a NEWTON di assegnare la forza di attrazione tra il sole e i pianeti ***.

In virtù della legge delle aree, la forza deve passare pel sole; di più la sua componente normale è diretta verso il centro di curvatura della

---

* *Astronomia nova, seu physica cœlestis tradita commentariis de motibus stellæ Martis,* etc. Praga, 1609.

** *Harmonices mundi libri V,* etc. Lintz, 1619.

*** l. c., pag. 362 e seg.

ellissi, interno alla ellissi; dunque la forza è diretta verso il sole.

Se p è il parametro di una delle orbite, si trova subito (Vol. 1°, pag. 42) che l'accelerazione è espressa da $-\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}$, essendo c la costante delle aree; se quindi m è la massa di un pianeta si ha

$$F = -\frac{mc^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Sia T la durata della rivoluzione periodica; $\frac{1}{2}c$ è l'area descritta in una unità di tempo; onde

$$c = \frac{2\pi ab}{T} \quad \text{con} \quad p = \frac{b^2}{a};$$

e però

$$F = -\frac{km}{r^2}$$

dove

$$k = 4\pi^2 a^3 : T^2$$

è un fattore costante per tutti i pianeti in virtù della terza legge.

Ma pel principio dell'azione eguale e contraria alla reazione, questa è pure la forza con cui il pianeta attrae il sole; se quindi M è la massa del sole, k' un'altra costante, dovendo essere

$$F = -Mk' : r^2,$$

risulta

$$\frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = f = \text{cost.}$$

Però l'attrazione mutua tra il sole ed un pia-

neta è espressa da

$$F = -f \frac{Mm}{r^2};$$

cioè varia in ragion diretta del prodotto delle masse e in ragion inversa del quadrato della distanza.

L'estensione di questa legge a due elementi materiali qualunque, a distanza finita tra loro, costituisce la *legge universale di attrazione o gravitazione* *.

La costante f dicesi di gravitazione o di GAUSS: le sue dimensioni sono quelle di una forza divise per m^2 ed l^{-2}; onde

$$[f] = [l^3, m^{-1}, t^{-2}];$$

il valore di f poi dipende dalla scelta delle unità di misura. Se $f = 1$, allora l'unità di forza è l'attrazione che due unità di massa esercitano all'unità di distanza; cioè una unità diversa dalla dine, già adottata.

Per trovare il valore di f nel sistema di misure fondamentali, si supponga M eguale alla massa della terra: F si riduce al peso di m, cioè mg; fatto $r = a$ (raggio terra), risulta

$$g = \frac{4}{3} f \pi a \rho$$

(ρ, densità media della terra, eguale a 5,67):

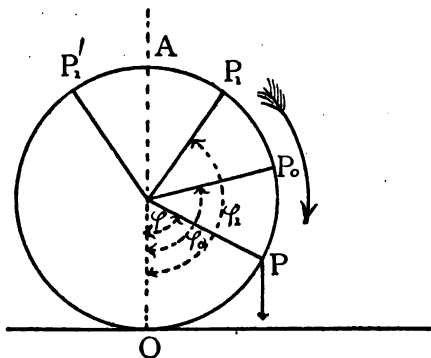
$$2\pi a = \text{m. } 4.10^7$$

* NEWTON, l. c., pag. 369. Prop. VII.

$$f = \frac{3}{2} \cdot \frac{9.81}{2\pi a \rho} = \frac{29,43}{8.10^7.5,67} = \frac{1}{1,543.10^7};$$

f verrà, in tal caso, espressa in dine.

§ 4. **Pendolo semplice oscillante nel vuoto.** — Un punto pesante è collegato mediante una sottile asta rigida, di cui si trascura il peso, ad un punto fisso; spostato dalla posizione verticale, il mobile venga lanciato con una velocità v_0 contenuta in un piano verticale. Il moto avverrà sempre in quel piano. Un sistema siffatto costituisce *un pendolo semplice* ed il problema del moto è equivalente a quello del moto di un punto pesante su di un cerchio posto in un piano verticale.

Sia (Fig. 4) a il raggio del cerchio (lunghezza

(Fig. 4)

del pendolo); φ l'angolo che la direzione positiva del raggio (o dell'asta) forma colla verticale passante

pel centro. Come già si è osservato (§ 1), la (7) basta per la determinazione del moto; si osservi infatti che

$$v = a\dot{\varphi}$$
$$U = mgz = mga(1 - \cos\varphi)$$

e però la (7) ci dà

$$a^2\dot{\varphi}^2 + 2ga(1 - \cos\varphi) = h;$$

e se nella posizione iniziale P_0 il valore di φ dicesi φ_0, si ha

$$v_0^2 + 2ga(1 - \cos\varphi_0) = h$$

donde

$$v^2 = a^2\dot{\varphi}^2 = 2ag(k + \cos\varphi) \tag{13}$$

con

$$k = \frac{v_0^2}{2ag} - \cos\varphi_0.$$

Si ha una equazione differenziale che, con una quadratura, determina φ in funzione di t.

Diciamo R la reazione normale del cerchio, valutata positiva verso il centro; poichè

$$F_n = -mg\cos\varphi,$$

si ha dalla (5)

$$R = m\frac{v^2}{a} + mg\cos\varphi = mg(2k + 3\cos\varphi).$$

Se si suppone il punto pesante mobile entro un tubo circolare infinitamente sottile, il punto eserciterà una pressione sulla parete esterna se $R > 0$; altrimenti la pressione si eserciterà sulla interna; se il punto pesante è collegato al centro

mediante un filo sottile, perchè questo resti sempre teso occorre che $R > 0$; nei punti in cui $R = 0$, cioè

$$\cos\varphi = -\frac{2k}{3} = \frac{1}{3}\left(2\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{ag}\right)$$

il punto abbandonerà il cerchio descrivendo una parabola: però deve essere

$$\left|2\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{ag}\right| < 3.$$

Tornando ora al valore (13) di v, occorre distinguere tre casi.

a) Sia $|k| > 1$; v non può mai annullarsi ed estraendo la radice quadrata da (13), dovremo tenere il segno del valore iniziale di v. Il mobile percorrerà il cerchio sempre nello stesso senso; abbiamo cioè il moto *rivolutivo*.

b) $k = 1$; si ha

$$v^2 = a^2\dot{\varphi}^2 = 4ag\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

per $\varphi = \pi$, v si annulla e, se la velocità iniziale è diretta da P_0 verso O, il mobile giungerà in A (punto più alto del cerchio) con velocità nulla.

Inoltre essendo

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \int\frac{d\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} + \text{cost.},$$

si può esprimere t mediante φ per mezzo di funzioni elementari. Limitando l'integrale del 2° mem-

bro tra φ_0 e π, otterremo il tempo impiegato dal mobile a giungere in A. Ma poichè nel limite superiore la funzione da integrare diventa infinita di primo ordine, così l'integrale è infinito e il mobile raggiungerebbe A dopo un tempo infinito (moto *assintotico*).

c) Supponiamo finalmente $|k| < 1$ e determiniamo un angolo reale φ_1 per modo che

$$k = -\cos\varphi_1 = \frac{v_0^2}{2ag} - \cos\varphi_0;$$

φ_1 sarà acuto od ottuso secondo che k è negativo o positivo; sarà $\varphi_1 = \varphi_0$ se $v_0 = 0$; in ogni altro caso, essendo $\cos\varphi_0 > \cos\varphi_1$, sarà $\varphi_0 < \varphi_1$. Quindi, sempre dalla (13),

$$a^2\dot\varphi^2 = 2ag(\cos\varphi - \cos\varphi_1) = 4ag\left(\text{sen}^2\frac{\varphi_1}{2} - \text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

però deve essere

$$-\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_1.$$

La velocità, nulla per $\varphi = \pm\varphi_1$, assume lo stesso valore per $\pm\varphi$; il moto è quindi *oscillatorio* tra $+\varphi_1$ e $-\varphi_1$. La durata T di una semioscillazione è il tempo impiegato a percorrere l'arco da φ_1 ad O; cioè

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{sen}^2\frac{\varphi_1}{2} - \text{sen}^2\frac{\varphi}{2}}};$$

ed è espresso da un integrale ellittico completo di prima specie.

Colla sostituzione

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{sen}\frac{\varphi_1}{2}\operatorname{sen}u$$

esso si riduce alla forma *normale*

$$(14)\quad T\sqrt{\frac{g}{a}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\varphi_1}{2}\operatorname{sen}^2 u}}.$$

Se φ_1, e quindi φ, è molto piccolo, cioè se consideriamo oscillazioni molto piccole, si ha

$$\operatorname{sen}^2\frac{\varphi_1}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{4}(\varphi_1^2-\varphi^2);$$

e quindi

$$T\sqrt{\frac{g}{a}}=2\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_1^2-\varphi^2}}=\pi.$$

La durata di queste oscillazioni essendo indipendente da φ_1, la formula precedente (in cui sono racchiuse le leggi delle piccole oscillazioni) mostra subito il così detto isocronismo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice *.

Posto $\operatorname{sen}\frac{\varphi_1}{2}=\alpha$; notando che

$$\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\varphi_1}{2}\operatorname{sen}^2 u\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha^2\operatorname{sen}^2 u+\cdots,$$

* GALILEO, *Discorsi*, etc., già citati, pag. 139 e seg. Vedi pure: *Dialogo dei Massimi Sistemi*, Ediz. naz., **7**, pag. 256, 475.

e tenendo, nel calcolo di (14), i termini in α^2, abbiamo

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 u \, d u\right]$$
$$= \left(\pi + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \pi\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)$$

ed infine

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi\left(1 + \frac{\varphi_1^2}{16}\right).$$

§ 5. **Pendolo cicloidale.** — Si tratta ancor qui del moto di un punto pesante su di una cicloide posta in un piano verticale e che può realizzarsi in questo modo.

Sia (Fig. 5) AO un arco di cicloide; AQ la sua evoluta; un filo sottilissimo lungo $QO = a$, fisso in Q, porta in O un peso. Il filo, dalla verticale QO, oscilla in modo che svolgendosi su AQ (e l'arco simmetrico) il punto O percorre l'arco di cicloide AO e il suo simmetrico. Il moto può studiarsi col sussidio della (7), tenuto conto dell'equazione della cicloide; più semplicemente si può procedere così.

Il segmento PR è eguale all'arco AR e siccome $PC = CR$, si conclude che CR è la metà dell'arco AR; così parimenti PM è la metà di $PO = s$. La forza che sollecita P, cioè il proprio peso, può decomporsi in due: una secondo PR, eguale alla

tensione del filo; l'altra secondo PM; questa forza

(*Fig. 5*)

tangenziale è quella che produce il moto. Tale forza tangenziale sta al peso come PM sta a CM cioè come $s : a$; quindi l'accelerazione tangenziale, diretta verso M, è $\frac{g}{a} s = k^2 s$, dove $k^2 = \frac{g}{a}$; l'equazione del moto è

$$\ddot{s} + k^2 s = 0.$$

Ma in tal caso sappiamo (Vol. 1°, pag. 48) che il punto fa delle oscillazioni isocrone intorno ad

O, la cui durata è

$$\frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}};$$

onde concludiamo che la cicloide è *tautocrona* per un punto pesante nel vuoto *.

Se il moto avviene in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità, l'equazione del moto è

$$\ddot{s} - h^2 \dot{s} + k^2 s = 0;$$

il moto resta ancora tautocrono **.

Si può inversamente dimostrare che la cicloide è la sola curva tautocrona per un punto pesante nel vuoto. Proponiamoci infatti la ricerca di una curva siffatta; essa deve essere contenuta in un piano verticale, colla concavità in alto. Sia O (Fig. 5) il punto più basso, colla tangente orizzontale; s l'arco contato da O, e all'altezza z_0 il mobile venga abbandonato senza velocità iniziale; allora da (7) risulta

$$v^2 = \dot{s}^2 = 2g(z_0 - z)$$

ed il tempo impiegato a percorrere l'arco PO è dato da

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{z_0} \frac{ds}{dz} \frac{dz}{\sqrt{z_0 - z}},$$

---

* HUYGHENS, *Orologium oscillatorium* (1673). NEWTON, l. c., I, prop. L, pag. 137.

** NEWTON, l. c., II, prop. XXVI, pag. 275.

pensando s funzione di z. Posto

$$s = \psi(z), \quad z = z_0 u$$

e procedendo come nell'esercizio 2, Cap. 1°, risulta

$$s = \sqrt{8az}.$$

Con tale valore poi risulta

$$t\sqrt{2g} = \sqrt{2a}\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z(z_0 - z)}} = \sqrt{2a}\left(\text{arc sen}\frac{2z - z_0}{z_0}\right)_0^{z_0},$$

cioè

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Se poi α è l'angolo che la tangente in P forma coll'asse x, si ha

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dz}{ds} = \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{z}{2a}}$$

donde

$$z = 2a\,\text{sen}^2\alpha = a(1 - \cos 2\alpha);$$

poscia

$$dx = \cos\alpha\, ds = 2a\cos^2\alpha\, d\alpha,$$

$$x = a\alpha + a\,\text{sen}\,2\alpha.$$

Le due espressioni di x e z in funzione di α definiscono appunto una cicloide il cui cerchio generatore ha per diametro $\frac{1}{2}a$.

Notiamo che tale cicloide è pure definita dalla

$$s^2 = 8az.$$

§ 6. **Pendolo sferico.** — Trattiamo lo stesso problema del § 4, nella ipotesi che il punto pesante venga lanciato in una direzione qualsiasi, restando

su di una sfera col centro, origine degli assi, nel punto di sospensione. Avremo sempre
$$v^2 = h - 2gz;$$
e sul piano equatoriale, per la (9),
$$r^2 \dot{\theta} = c.$$
Se $c = 0$, torniamo al problema del pendolo semplice; supponiamolo quindi diverso da zero e precisamente $c > 0$.

L'equazione della sfera ci dà
$$r^2 + z^2 = a^2, \quad r\dot{r} + z\dot{z} = 0;$$
inoltre
$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = h - 2gz.$$
Eliminando $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$ otteniamo
$$a\dot{z} = \pm\sqrt{(a^2 - z^2)(h - 2gz) - c^2} = \pm\sqrt{f(z)},$$
e poscia
$$d\theta = \frac{c\,dt}{r^2} = \pm \frac{ac\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{f(z)}}.$$
Con due quadrature conosceremo una relazione fra z e t e un'altra fra θ e z; questa, osservando che $\theta = \text{arctang}\,\frac{y}{x}$, è l'equazione di una superficie; ed insieme colla sfera definisce la traiettoria. La discussione di questo problema e le quadrature si fanno col sussidio delle funzioni ellittiche *.

* DURÈGE, *Theorie d. ellipt. Funct.* Prag, 1878, pagine 304-330. GREENHILL, *The App. of elliptic Funct.*, London, 1892, pag. 214.

Possiamo, in breve, accennare alla discussione.

La $f(z)$, cioè $(a^2 - z^2)(h - 2gz) - c^2$, assume valori negativi per $z = \pm a$ e non potendo essere sempre negativa, si annullerà per due valori reali α e β di z compresi tra $+a$ e $-a$. La traiettoria è sempre limitata da due paralleli che il mobile alternativamente raggiunge in tempo finito, perchè $\sqrt{f(z)}$ diventa infinitesima di ordine $1/2$ per $z = \alpha, \beta$. Per questi valori $\dot{z} = 0$, senza che r e quindi v sia nulla; la velocità essendo diretta secondo il parallelo, la traiettoria è tangente a questi paralleli estremi. Sia γ la terza radice reale di $f(z) = 0$, compresa tra a e $+\infty$; poichè

$$\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = -a^2,$$

notando che il prodotto $\alpha\beta$ non può superare, in valore assoluto, a^2, si conclude che $\gamma(\alpha + \beta) < 0$; e quindi $\alpha + \beta < 0$. Questa relazione esprime che il parallelo equidistante dagli estremi giace nell'emisfero sud. Possono quindi avvenire due casi:

α positiva, β negativa ed in valor assoluto maggiore di α, ciò che accade se

$$a^2 h - c^2 > 0;$$

oppurre α e β negative, se

$$a^2 h - c^2 < 0.$$

Nel primo caso la proiezione della traiettoria sul piano equatoriale è tangente alle projezioni dei due cerchi estremi e all'equatore; nel secondo caso

ai soli due cerchi, poichè la traiettoria non attraversa l'equatore.

Se inizialmente z decresce, dinanzi ai radicali terremo il segno $-$, fino a che z abbia raggiunto il valore β, in cui $\dot{z}=0$; dopo ciò z cresce e terremo quindi il segno $+$, fino al punto in cui z raggiunge il valore α; ecc. Se poi inizialmente si lancia il punto z dal parallelo β, poichè z cresce terremo il $+$; se è lanciato dal parallelo α, terremo il $-$.

Per calcolare la reazione R normale, si ha, proiettando la forza e R sul raggio della sfera:

$$R + mg\frac{z}{a} = -\frac{m}{a}(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}) = \frac{m}{a}v^2,$$

e quindi

$$R = \frac{m}{a}(h - 3gz).$$

Nei punti in cui $R = 0$, il mobile abbandona la sfera. Se α e β, e quindi anche z, sono negativi, essendo $v^2 - gz > 0$, il punto non potrà mai lasciare la sfera; nel caso di α positivo e β negativo, il distacco potrà e non potrà avvenire.

Notiamo da ultimo che se $\alpha = \beta$, il moto avverrà secondo un parallelo della sfera e sarà uniforme; le quadrature possono effettuarsi colle funzioni elementari *.

---

* Questo problema, che presenta notevoli analogie con

Uno dei risultati più importanti, che risultano dalla rappresentazione per funzioni ellittiche, è che le coordinate orizzontali del pendolo conico possono esprimersi razionalmente, mediante il tempo, con funzioni doppiamente periodiche di 2ª specie. La proiezione della traiettoria sul piano xy non ha flessi, e l'angolo compreso tra un massimo ed un minimo successivi di r è maggiore di $\frac{\pi}{2}$.

§ 7. **Equazioni del moto relativo.** — L'applicazione della seconda legge ci dà

$$m\ddot{P}_a = F - P;$$

ma dalla Cinematica (Vol. 1°, pag. 92) sappiamo che

$$\ddot{P}_a = \ddot{P}_r + \ddot{P}_s + \ddot{P}_c;$$

quindi

$$m\ddot{P}_r = F - P - m\ddot{P}_s - m\ddot{P}_c; \tag{15}$$

e questa dà luogo a tre equazioni differenziali del

---

quello del giroscopio (Cap. 5°, § 7, 8), ha una ricca bibliografia. Si possono consultare:

LAGRANGE, *Méc. analy.*, **2**, Sect. VIII, pag. 183. PUISEAUX, J. de Liouville (1), **7**. TISSOT, ibidem., *Thèse de Méc.* **17** (1852). DE SPARRE, Annal. de la Soc. scien. de Bruxelles 1884-85, pag. 49. HALPHEN, *Traité des Fonc. ellip.*, **2**, pag. 126. HERMITE, J. Crelle, **85**, pag. 246 oppure: *Sur quelques applications des Fon. ellip.* Paris 1885, pag. 112. CHAILAN, Bull. Soc. Math. de France, **17** (1889). Vedi pure il modello costruito da M. SCHILLING.

2° ordine rispetto alle coordinate relative del punto mobile; quindi potremo, come al solito, studiare il moto relativo di P.

Proiettando sulla tangente alla traiettoria relativa e notando che $\ddot{P}_c$ è normale alla direzione della velocità relativa, si deduce

$$m \frac{dv}{dt} = f_t$$

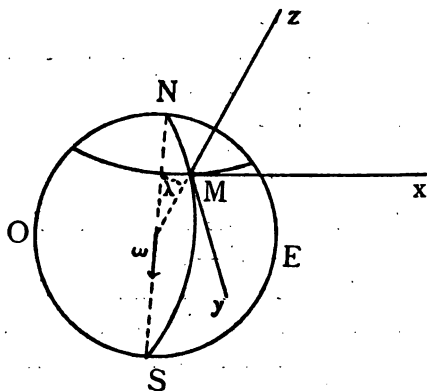
in cui f_t è la componente tangenziale di

$$F - P - m\ddot{P}_s.$$

Se quindi f_t è la derivata negativa di U, rispetto l'arco, potremo stabilire una formula analoga alla (7).

Facciamo ora alcune applicazioni delle precedenti considerazioni.

§ 8. **Libera discesa dei gravi nel vuoto, tenuto conto della rotazione della terra.** — Supponiamo di trovarci nell'emisfero boreale alla colatitudine λ; la terna x, y, z mobile, connessa colla terra supposta sferica, sia così costituita (Fig. 6): l'asse z sia la verticale del luogo, positiva verso l'alto; l'asse x tangente al parallelo verso l'Est e l'asse y tangente al meridiano verso il Sud. Nello studio di questi moti relativi si può prescindere dal moto di traslazione della terra; il cui centro, nel tempo assai breve in cui accade il fenomeno della caduta di un grave, può supporsi dotato di un moto rettilineo ed uniforme, percorrendo circa 3.10^4 m. al secondo.

Non terremo dunque conto che del moto di rotazione intorno alla linea dei poli riguardata come

(*Fig. 6*)

fissa; il moto di rotazione avendo luogo da Ovest ad Est, la direzione positiva dell'asse di rotazione è quella da Nord verso Sud, conforme alle convenzioni fatte. La velocità angolare di rotazione è data da

$$\omega = 2\pi : 86400 = 7.10^{-5} \text{ circa}$$

e però

$$\omega^2 < 5 \,.\, 10^{-9}.$$

Dobbiamo ora applicare la (15); ma notiamo che

$$\ddot{P}_c = 2 \,|\, \Omega \dot{P}_r;$$

se quindi la velocità relativa si mantiene entro limiti ristretti e piccoli, il mod. di $\ddot{P}_c$ è dello stesso ordine di ω e quindi si può trascurare in una

prima approssimazione e ritenere che

$$m\ddot{P}_r = F - P - m\ddot{P}_s.$$

Supposto il grave in riposo relativo (in una regione assai prossima alla terra), la forza che lo sollecita, dataci dalla bilancia o dalla tensione di un filo, si riduce al peso, costante e sensibilmente verticale. L'accelerazione è pure costante ed è quindi la stessa come se il peso non fosse cambiato e la terra stesse fissa.

Ciò giustifica quanto si era annunciato al Capitolo 1°, § 3.

Notiamo ancora che la $m\ddot{P}_s$, nel caso attuale, si riduce ad $m\omega^2 r$ [come risulta dalle formule (16) del Vol. 1°, pag. 94] ed è diretta normalmente all'asse e volta verso l'asse; però $-m\ddot{P}_s$, cioè $m\omega^2 r$ è volta in senso contrario e dicesi *forza centrifuga*. Per passare poi da queste ordinarie forze centrifughe alla $m\ddot{P}_c$ basta sostituire all'asse di rotazione, alla velocità angolare, ecc. l'asse di rotazione degli assi mobili (che in questo caso coincide col primo) e la velocità relativa, ecc.; di qui il nome di forza *centrifuga composta* dato ad $m\ddot{P}_c$ *. Siccome $F - P$ è la forza dovuta all'attrazione della terra e in una regione assai prossima a questa (Cap. 6°, § 2) si può ritenere costante,

* CORIOLIS, *Journal de l'Éc. Polytech.*, Cah. **24** (1835), pp. 142-154.

come $\ddot{P}_s$; così risulta la costanza di $F-P-m\ddot{P}_s$. Si deduce pure che il peso, che noi misuriamo colla bilancia, è la risultante della attrazione della terra e della forza centrifuga.

Spingiamo ora più oltre l'approssimazione. Poichè le componenti di Ω secondo gli assi mobili sono

$$o, \quad \omega \operatorname{sen} \lambda, \quad -\omega \cos \lambda,$$

quelle di $\ddot{P}_c$ sono

$$2\omega(\dot{z} \operatorname{sen} \lambda + \dot{y} \cos \lambda), \quad -2\omega\dot{x} \cos \lambda, \quad -2\omega\dot{x} \operatorname{sen} \lambda.$$

La equazione (15) ci dà

$$(16) \begin{cases} \ddot{x} = -2\omega(\dot{y}\cos\lambda + \dot{z}\operatorname{sen}\lambda), \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}\cos\lambda, \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\operatorname{sen}\lambda; \end{cases}$$

queste potrebbero rigorosamente integrarsi qualunque sieno le condizioni iniziali di moto. Limitiamoci a considerare il caso in cui il grave cade, senza velocità iniziale, dall'altezza a, trascurando i termini in ω^2 rispetto a quelli in ω.

Dalle due ultime delle (16) si ha

$$\dot{y} = 2\omega x \cos \lambda, \quad \dot{z} = 2\omega x \operatorname{sen} \lambda - g t;$$

sostituendo nella prima e trascurando ω^2 si ha

$$\ddot{x} = 2\omega g t \operatorname{sen} \lambda,$$

e, successivamente,

$$\dot{x} = \omega g t^2 \operatorname{sen} \lambda, \quad x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen} \lambda.$$

Poscia

$$\dot{y} = o, \quad \dot{z} = -g t$$

ed infine:

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen} \lambda, \quad y = o, \quad z = a - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminando t, tra la prima e la terza, si ha l'equazione della traiettoria (parabola semicubica). Il tempo impiegato dal grave a raggiungere il suolo è dato da $\sqrt{\frac{2a}{g}}$ ed il punto in cui il mobile colpisce il piano xy ha per coordinate

$$x = \frac{1}{3}\omega g \operatorname{sen} \lambda \left(\frac{2a}{g}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y = 0.$$

Avendosi $x > 0$ si deduce

Un grave che cade nell'emisfero boreale senza velocità iniziale devia dalla verticale verso l'Est.

Tenendo conto dei termini in ω^2 avremmo trovata anche una deviazione verso Sud. Quella verso Est è stata messa in luce da numerose esperienze *.

---

* Eseguita, senza successo da HOOKE, per suggerimento di NEWTON (1679), fu ritentata da GUGLIELMINI (1782) a Bologna dalla torre degli Asinelli (metri 78,29), da TADINI (1795) a Bergamo; da BENZENBERG (1803) dalla torre di S. Michele in Amburgo (m. 130,50) e poi (1804) in un pozzo delle miniere di Schlebuch (m. 100,50) e finalmente da REICH (1831-33) in una miniera di Freiberg (m. 158,54). In queste tre ultime esperienze (laboriose e lunghissime) la deviazione orientale che in base al calcolo doveva risultare di mm. 3,85; 4,67; 27,5; risultò rispettivamente di mm. 4; 5,05; 28,4. Le esperienze invece furono in pieno disaccordo colla teoria circa la deviazione Sud.

Vedi, anche per la parte bibliografica: G. PESCI, *Sulla deviazione meridionale dei gravi*. Livorno, 1887.

§ 9. **Pendolo di Foucault.** — Ferme restando le notazioni del § precedente, supponiamo che un punto pesante sia connesso con un punto dell'asse z (di altezza a) mediante un'asta rigida assai sottile. Si tratta quindi di studiare il moto di un punto pesante su di una sfera tangente in M alla terra. Avendosi

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

le equazioni del moto si ottengono dalle (16), tenendo conto della reazione della superficie. Avremo quindi

$$(17) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \mu x - 2\omega(\dot{y}\cos\lambda + \dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda), \\ \ddot{y} = \mu y + 2\omega\dot{x}\cos\lambda, \\ \ddot{z} = \mu(z - a) + 2\omega\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\lambda - g; \end{cases}$$

le quali (§ 7) ammettono l'integrale

$$v^2 = h - 2gz.$$

Eliminando μ (funzione incognita di x, y, z, t) tra le due prime si ha:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 2\omega\cos\lambda(x\dot{x} + y\dot{y}) + 2\omega y\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\lambda,$$

cioè

$$(18) \quad \frac{d}{dt}[x\dot{y} - y\dot{x} - \omega\cos\lambda(x^2 + y^2)] = 2\omega y\dot{z}\,\mathrm{sen}\lambda.$$

Se $\lambda = 0$, cioè se l'osservazione è fatta al polo, otteniamo subito un altro integrale delle (17). Però, partendo da M, e muovendoci su di un meridiano, avviciniamoci al polo, trasportando la terna x, y, z. Avremo

$$x\dot{y} - y\dot{x} - \omega(x^2 + y^2) = c;$$

cioè, colle notazioni del § 6,

$$r^2 \dot{\theta} - \omega r^2 = c.$$

Potremmo ora procedere come in quel § e ridurre agevolmente il problema alle quadrature. Più brevemente si può procedere così. Riferiamo la posizione del mobile all'asse z e ad una coppia d'assi fissi ξ, η; i quali rispetto agli assi x, y, saranno dotati di un moto di rotazione uniforme, con velocità angolare ω, da Est verso Ovest; cioè di un moto contrario a quello della terra. All'istante t l'asse ξ e l'asse x, coincidenti per $t=0$, comprenderanno un angolo ωt e però

$$\xi + i\eta = (x + iy)e^{-i\omega t}.$$

D'altra parte le (17), per $\lambda = 0$, dànno:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \mu(x + iy) + 2\omega i(\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\ddot{z} = \mu(z - a) - g;$$

quindi

$$\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} = (\mu - \omega^2)(\xi + i\eta);$$

e però trascurando ω^2, avremo

$$\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} = \mu(\xi + i\eta), \quad \ddot{z} = \mu(z - a) - g$$

che coincidono con le equazioni differenziali del pendolo sferico.

Quindi

Il moto di un punto pesante su di una sfera posta al polo e mobile colla terra è identico al moto di un punto pesante sulla stessa sfera supposta fissa rispetto agli assi ξ, η, z.

In particolare se il moto avviene in un piano

meridiano, p. es., quello determinato dall'asse ξ, abbiamo il moto di un pendolo semplice oscillante al polo: dunque

Il piano di oscillazione del pendolo, al polo, girerà intorno l'asse della terra in senso inverso al moto di rotazione della terra e compirà un giro in un giorno.

Supponiamo ora fatta l'osservazione alla colatitudine λ; ma limitiamoci a considerare le piccolissime oscillazioni del pendolo in un piano verticale: per cui z e $\dot{z}$ possono trascurarsi; allora dalla (18) abbiamo

$$x\dot{y} - y\dot{x} - \omega \cos\lambda (x^2 + y^2) = c,$$

e siamo ricondotti al caso precedente, salvo la sostituzione di $\omega \cos\lambda$ ad ω: onde

Il piano di oscillazione di un pendolo, alla colatitudine boreale λ, gira in senso contrario al moto diurno della terra colla velocità angolare $\omega \cos\lambda$. L'inverso avviene nell'emisfero australe.

Lo spostamento in un giorno sarà dato da

$$86400 \,.\, \omega \cos\lambda = 2\pi \cos\lambda;$$

lo spostamento angolare è di $360^\circ . \cos\lambda$; è nullo all'equatore, massimo ai poli; alla latitudine di 45° è eguale a circa 252°; cioè il piano d'oscillazione si sposta di circa $15'$ in un minuto secondo. La teoria precedente illustra una esperienza celebre di FOUCAULT *.

---

* La deviazione del piano di oscillazione del pendolo

Esercizi.

1. Dimostrare che se in un moto centrale la forza è espressa da

$$m c^2 [\varphi(\theta) r^{-2} + b r^{-3}],$$

la determinazione della traiettoria si riconduce alle quadrature.

Posto $u = r^{-1}$, la (13) del Vol. 1°, pag. 42, ci dà

$$\ddot{u} + (1 + b) u = \varphi(\theta)$$

equazione diff. di 2° ordine completa ed a coefficienti costanti.

---

era stata già osservata dagli accademici del Cimento; i quali, ricevendo la punta d'un pendolo sopra polvere di marmo, notarono che la traiettoria era « una spirale ovata, che sempre và restringendosi verso il Centro » [novembre 1661. *Saggi di naturali esperienze*, 3ª ed. fiorentina (1841), pag. 20; e Atti e Mem. inedite dell'Acc. del Cimento pubbl. da G. TARGIONI TOZZETTI (1780), pp. 389 e 669]. Particolareggiate notizie storiche si trovano in BERTELLI, *Ricerche sui piccoli e spontanei moti dei pendoli* [Bull. di Bibl. di Boncompagni, (1873)]; GENOCCHI, *Rassegna di scritti intorno alle deviazioni dei pendoli e alla sperienza del* FOUCAULT [ibidem, **15** (1882)]. L'esperienza di FOUCAULT, eseguita nel 1851 al Panthéon a Parigi [Recueil des travaux scientifiques de L. FOUCAULT, Paris (1878), pp. 378-385. Revue Scient. **18** (4), pag. 548; (1902)] permise ancora il calcolo della durata della rotazione diurna della terra in $23^h.33^m.57^s$; altre esperienze inglesi nel 1895 diedero $24^h.7^m.30^s$.

Le equazioni (16) su cui sostanzialmente si fonda tutta la teoria sono di POISSON [J. de l'École Polytechn. Cah. **26** (1838), pag. 21].

2. Discutere il caso in cui la forza è

$$mc^2(ar^{-2} + br^{-3}).$$

Abbiamo

$$\ddot{u} + (1 + b)u = a.$$

Se $1 + b = n^2$, posto $u = v + \frac{a}{1 + b}$, si ottiene

$$r = \frac{\frac{n^2}{a}}{1 + A\cos n(\theta - \theta_0)}.$$

Se $1 + b$ è negativo, muteremo il coseno circolare in iperbolico. Se $1+b=0$, r^{-1} è una funzione di 2° grado in θ.

3. Lo stesso problema supponendo la forza della forma

$$k^2 r - k_1^2 r^{-3}.$$

Si applichi il metodo del § 2; posto $u = r^{-2}$ si ha

$$d\theta = \pm \frac{c\,du}{\sqrt{-k^2 + hu - (k_1^2 + c^2)u^2}}.$$

Il trinomio in u sotto radice (negativo per $u = 0, \infty$) ammetterà due radici reali positive tra le quali è compreso u e quindi r: la traiettoria è compresa tra due cerchi concentrici cui risulta tangente.

Posto il trinomio sotto la forma $-n^2(u - \alpha)(u - \beta)$ e poscia

$$u = \alpha\cos^2\varphi + \beta\,\text{sen}^2\varphi$$

risulta $\varphi = \frac{n}{c}\theta$; onde la traiettoria è

$$\frac{1}{r^2} = \alpha\cos^2\frac{n}{c}\theta + \beta\,\text{sen}^2\frac{n}{c}\theta.$$

Dalla $r^2\dot{\theta} = c$ abbiamo inoltre

$$n\,dt = \frac{\frac{1}{c}d\theta}{\alpha\cos^2\frac{n}{c}\theta + \beta\,\text{sen}^2\frac{n}{c}\theta} = \frac{d\,\text{tang}\frac{n}{c}\theta}{\alpha + \beta\,\text{tang}^2\frac{n}{c}\theta}, \text{ ecc.}$$

4. Stesso problema per una forza della forma

$$m c^2 r^{-2} (a + b \cos 2\theta).$$

Procedendo come nell'esercizio 1 e 2 si ha

$$\ddot{u} + u = -(a + b \cos 2\theta).$$

Posto

$$u = v - a + \beta \cos 2\theta$$

e prendendo $\beta = \frac{1}{3} b$ ci riduciamo ad una equazione omogenea: quindi

$$\frac{1}{r} = A \cos\theta + B \operatorname{sen}\theta - a - \frac{1}{3} b \cos 2\theta$$

curva di 4° ordine.

5. Stesso problema per una forza della forma

$$m c^2 r^{-2} (a \cos 2\theta + b \operatorname{sen} 2\theta + c)^{-\frac{3}{2}},$$

L'equazione da integrare, posto

$$a = \rho \cos 2\alpha, \quad b = \rho \operatorname{sen} 2\alpha$$

e cambiando θ in $\theta + \alpha$, è

$$\ddot{u} + u = -(\rho \cos 2\theta + c)^{-\frac{3}{2}}.$$

L'applicazione del metodo generale (variazione costanti arbitrarie) ci dà

$$u = A \cos\theta + B \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \int \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{(\rho \cos 2\theta + c)^{\frac{3}{2}}} - \operatorname{sen}\theta \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{(\rho \cos 2\theta + c)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ma

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{(\rho \cos 2\theta + c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho - c} \frac{\cos\theta}{(\rho \cos 2\theta + c)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{(\rho \cos 2\theta + c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho + c} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(\rho \cos 2\theta + c)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sostituendo e ripassando alle antiche costanti si ha

$$u = A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$+ \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}(a\cos 2\theta + b\,\mathrm{sen}\,2\theta + c)^{\frac{1}{2}},$$

equazione di una conica. Nel caso di $\rho = c$, i due precedenti integrali diventano $\frac{1}{2}(2\rho)^{-\frac{3}{2}}\cos^{-2}\theta$, $(2\rho)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{tang}\,\theta$; quindi

$$u = A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{C}{\cos\theta},$$

ed in coordinate cartesiane

$$C(x^2 + y^2) + x(Ax + By - 1) = 0$$

conica tangente nell'origine all'asse y.

[HALPHEN, DARBOUX, Comp. Rend., **84**. *Note à la Méc. de Despeyrous*].

6. In un moto centrale, con una trasformazione omografica, si può supporre il centro all'infinito.

Posto

$$x_1 = \frac{x}{y}, \qquad y_1 = \frac{1}{y}, \qquad dt_1 = -\frac{dt}{y^2}$$

risulta

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{y^2}\frac{dt}{dt_1} = c; \qquad \frac{d^2x_1}{dt_1^2} = 0;$$

$$\frac{dy_1}{dt_1} = -\frac{\dot{y}}{y^2}\frac{dt}{dt_1} = \dot{y}; \qquad \frac{d^2y_1}{dt_1^2} = -\ddot{y}y^2.$$

Ma

$$\ddot{y} = -F\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

onde

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{Fy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Il punto x_1, y_1 si muove sotto l'azione di una forza parallela all'asse x_1.

[APPELL, l. c., I, pag. 373].

7. Moto di un punto in un piano allorchè la forza deriva dal potenziale

$$U = mf(r) + mF(\theta)r^{-2}.$$

La forza secondo la normale al raggio, cioè $-\frac{dU}{rd\theta}$, ci dà

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\frac{1}{r^2}\frac{dF}{d\theta};$$

integrando

$$(r^2\dot{\theta})^2 = -2F(\theta) + A.$$

L'integrale delle forze vive poi dà

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2f(r) + \frac{2F(\theta)}{r^2} = h.$$

Eliminando θ, si ha

$$\dot{r}^2 + \frac{A}{r^2} + 2f(r) = h$$

che con una quadratura ci dà r in funzione di t; ecc.

8. Moto di un punto, su di una spirale logaritmica, attratto dal polo con una forza proporzionale alla distanza.

Si ha subito

$$v^2 = k^2(a^2 - r^2) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2,$$

supponendo $v = 0$ per $r = a$. Ma $r = e^{m\theta}$; onde

$$\dot{r} = \pm c\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Se r decresce col tempo risulta

$$r = a \cos ct.$$

Il moto avviene sempre nello stesso senso; il tempo impiegato a raggiungere il polo è $\frac{\pi}{2c}$, indipendente dal valor iniziale di r.

9. Un punto descrive una spirale logaritmica attratto dal polo con una forza $\mu . r^n$; alla distanza a la velocità è v_0. Trovare la velocità e la pressione sulla curva.

Il teorema delle forze vive ci dà

$$v^2 + \frac{2\mu r^{n+1}}{n+1} = v_0^2 + \frac{2\mu a^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1.$$

La componente normale della forza è $\mu r^n \operatorname{sen} \alpha$ (α angolo costante del raggio colla tangente): onde

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{R}{m} + \mu r^n \operatorname{sen} \alpha;$$

inoltre $\rho = \dfrac{r}{\operatorname{sen}' \alpha}$; quindi

$$\frac{R}{m} = \left(v_0^2 + \frac{2\mu a^{n+1}}{n+1} \right) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{r} - \frac{n+3}{n+2} \mu r^n \operatorname{sen} \alpha.$$

Se $n = -3$ e $v_0^2 = \dfrac{\mu}{a}$, sarà $v^2 = \dfrac{\mu}{r}$ ed $R = 0$; cioè il moto avviene liberamente.

[ROUTH, *A Treatise on Dinamics of a Particle*, Cambridge (1898), pag. 110].

10. Nel moto prodotto da una forza centrale, funzione della sola distanza, la traiettoria è un circolo di raggio $\dfrac{1}{a}$. In un punto qualunque si fa variare infinitamente poco la direzione della velocità; studiare il moto.

Se F è la forza; $u = r^{-1}$, si ha

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{c^2} \varphi(u), \qquad \text{con} \qquad \varphi(u) = F u^{-2}.$$

Perchè la traiettoria sia circolare è necessario che

$$c = r v_0 = \frac{v_0}{a}, \qquad \frac{\varphi(a)}{c^2} = a.$$

In un punto qualunque la velocità sia ancora v_0, e formi con il raggio non più un angolo retto ma un angolo $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (ε assai piccolo).

La costante c, nel nuovo movimento, sarà $c \cos \varepsilon$. Inoltre porremo

$$u = a + \rho$$

con ρ funzione di θ, contato a partire dal raggio vettore iniziale.

Poichè, trascurando termini in ε^2 e ρ^2, è

$$\frac{1}{c^2}\varphi(u) = a + \rho \frac{a\varphi'(a)}{\varphi(a)},$$

otteniamo

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho\left[1 - \frac{a\varphi'(a)}{\varphi(a)}\right] = 0.$$

Nel caso che

$$0 < 1 - \frac{a\varphi'(a)}{\varphi(a)} = k^2,$$

si ha $$\rho = A \operatorname{sen} k\theta.$$

Ma

$$\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)_0 = \operatorname{cotg} \varepsilon; \qquad -\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 = a\varepsilon$$

quindi

$$\rho = -\frac{a\varepsilon}{k} \operatorname{sen} k\theta$$

$$u = a - \frac{a\varepsilon}{k} \operatorname{sen} k\theta.$$

Il valore u è compreso tra $a \pm \frac{a\varepsilon}{k}$; quindi r è pure sempre compreso tra due cerchi assai prossimi alla primitiva circonferenza. La traiettoria perturbata è tangente a questi due cerchi negli apsidi $\left(\text{il cui angolo è } \frac{\pi}{k}\right)$ e taglia la traiettoria circolare, ecc. In queste condizioni si dice che il

primo moto è *stabile*. Se k è un numero razionale la traiettoria (in prima approssimazione) si può ritenere chiusa.

Si vedrebbe subito che queste condizioni non sono più soddisfatte (e quindi il moto è *instabile*) se

$$1 - \frac{a\varphi'(a)}{\varphi(a)} \leqq 0.$$

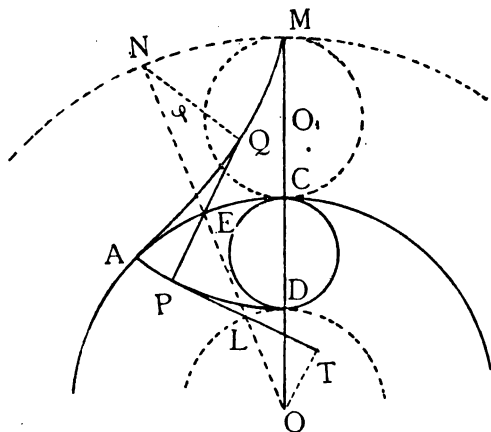
Se F varia come la potenza n del raggio, si ha

$$1 - \frac{a\varphi'(a)}{\varphi(a)} = n + 3;$$

dunque il moto è stabile se $n + 3 > 0$.

[THOMSON a. TAIT, l. c., I, pag. 350].

11. Un arco AD di ipocicloide è percorso da un punto soggetto ad una forza costantemente diretta verso O e proporzionale alla distanza PO. Studiare il moto.

Ci varremo dello stesso metodo seguito per la cicloide. Descrivasi (Fig. 7) un cerchio di raggio $OM = CO^2 : OD$;

(Fig. 7)

ed uno di diametro MC, il quale rotolando entro il primo descriverà una epicicloide AM tangente in A al cerchio OA, e che è l'evoluta di AD. Posto

$$OC = R, \qquad O_1 M = r, \qquad OM = R + 2r,$$

risulta

$$\text{arco } AQ = 4r \frac{R + r}{R + 2r} \operatorname{sen} \varphi.$$

Siccome

$$QE : NE = QP : NL = \operatorname{sen} \varphi,$$

si deduce che il rapporto tra l'arco AQ e la tangente EQ (e quindi tra PD e PL) è costante. D'altra parte

$$NL = 4r \frac{R + r}{R + 2r}$$

onde

$$QP = NL \operatorname{sen} \varphi = \text{arco } AQ;$$

quindi è vero che AM è l'evoluta di AD. Decomponiamo ora l'attrazione, eguale a $k^2 . PO$, secondo il filo PQM (che svolgendosi su AM, obbliga P a descrivere l'arco AD) e secondo la tangente PT. La PT ha un rapporto costante con PL e quindi coll'arco PD. Dunque il moto di P è tautocrono. Inoltre

$$PT = \frac{R + 2r}{2r} \cdot \frac{R + 2r}{2(R + r)} s, \qquad s = PD;$$

dunque la forza tangenziale è: $a^2 s$, dove

$$a^2 = \frac{k^2 (R + 2r)^2}{4r(R + r)} = k^2 \frac{MO}{MD}.$$

Il tempo in cui si compiono le oscillazioni isocrone è $\pi : a$.

[NEWTON, l. c., Lib. I, pag. 137. Prop. LI].

12. Dimostrare che la catenaria è tautocrona per una forza diretta secondo l'ordinata ed eguale ad $m^2 z$; e la spirale logaritmica per una forza centrale diretta al polo ed eguale a μr.

La componente tangenziale della forza è nei due casi $m^2 s$ e $\mu \cos^2 \alpha . s$; onde è vero, ecc.

13. Trovare una curva tautocrona per un punto pesante in un mezzo la cui resistenza è proporzionale al quadrato della velocità.

Applicando la (4) otteniamo subito

$$v \frac{dv}{ds} - k v^2 = - g \frac{dx}{ds};$$

un fattore integrante è e^{-2ks}: supposto $v = 0$ per $s = s_1$ e posto

$$f(s) = \int_0 e^{-2ks} \frac{dx}{ds} ds$$

risulta

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{s_1} \frac{e^{-ks} ds}{\sqrt{f(s_1) - f(s)}};$$

t deve essere indipendente da s_1. Abbiamo pure, ponendo

$$e^{-ks} ds = du, \qquad f(s) = \mathfrak{F}(u)$$

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{u_1} \frac{du}{\sqrt{\mathfrak{F}(u_1) - \mathfrak{F}(u)}}.$$

Quindi, essendo t indipendente da u_1, dal § 5 si ha

$$\frac{\alpha}{2} u^2 = \mathfrak{F}(u) = \int_0 e^{-2ks} \frac{dx}{ds} ds;$$

differenziando

$$\alpha u \frac{du}{ds} = e^{-2ks} \frac{dx}{ds}$$

ed infine

$$k \frac{dx}{ds} = \alpha(e^{ks} - 1),$$

equazione differenziale della curva. Per $k = 0$, si ottiene la cicloide.

L'equazione da cui siamo partiti equivale a

$$\ddot{s} - k \dot{s}^2 = - \alpha g \frac{e^{ks} - 1}{k}$$

che colla sostituzione

$$u = \frac{1 - e^{-ks}}{k}$$

si trasforma in

$$\ddot{u} = -\alpha g u.$$

Se la resistenza del mezzo fosse della forma $hv + kv^2$, e il moto avvenisse sulla stessa curva, avremmo l'equazione

$$\ddot{s} - h\dot{s} - k\dot{s}^2 = -\alpha g \frac{e^{ks} - 1}{k},$$

che colla stessa sostituzione si trasforma in

$$\ddot{u} - h\dot{u} = -\alpha g u$$

analoga a quella del § 5; onde una stessa curva è tautocrona per la resistenza kv^2 e per $hv + kv^2$.

[LAPLACE, *Méc. Céléste*, I, pag. 36. R. LESLIE Ellis, *The mathematical and other Writings*, Cambridge (1863), pag. 94. Sui moti tautocroni vedi anche APPELL, l. c., I, pag. 324; JULLIEN, *Problèmes de Méc. Rat.*, I, pag. 374-383; e finalmente le monografie di C. OHRTMANN, *Le problème des tautochrones*, Roma (1875), e di F. AMODEO: Avellino (1883)].

14. Trovare in un piano verticale una curva siffatta che un punto pesante P, partendo senza velocità da O, percorra un arco qualunque nello stesso tempo della corda.

Se $OP = r$ forma un angolo θ con la verticale si ha:

$$\dot{s}^2 = 2gz = 2gr\cos\theta, \qquad r = \frac{1}{2} g t^2 \cos\theta$$

onde

$$2\sqrt{\frac{r}{\cos\theta}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{r\cos\theta}}.$$

Differenziando si trova

$$\cos\theta\, dr + r \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \cos\theta\, ds = \cos\theta \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2};$$

elevando a quadrato e riducendo

$$\frac{dr}{r} = \text{tang}\, 2\theta \,.\, d\theta$$

donde con una integrazione

$$r^2 = c^2 \,\text{sen}\, 2\theta,$$

equazione di una lemniscata il cui asse è inclinato di 45° sulla verticale.

[SALADINI, Mem. Ist. N. Ital., I, p. 2, pag. 43-61 (1806)].

15. Stesso problema supponendo la forza diretta ad un centro fisso C e proporzionale alla distanza.

Le distanze di P e di O da C siano ρ ed a. Avremo

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta;$$

e poscia sull'arco:

$$\dot{s}^2 = a^2 - \rho^2 = 2ar\cos\theta - r^2$$

e sulla corda

$$\dot{r}^2 = 2ar\cos\theta - r^2$$

con θ costante e però il tempo impiegato a percorrere la corda è

$$\text{arc.}\cos\frac{a\cos\theta - r}{a\cos\theta} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2ar\cos\theta - r^2}},$$

in cui l'integrale del 2° membro è il tempo impiegato a percorrere l'arco.

Differenziando si ottiene

$$\cos\theta\, dr + r\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = \cos\theta\, ds;$$

onde si trova una lemniscata come nell'esercizio precedente.

[O. BONNET, J. de Liouville, 9, pag. 116 (1844)].

16. Un punto è mobile su di un cerchio ed è attratto da un punto O di questo con una forza funzione della sola distanza.

Determinare la forza in modo che la pressione sia costante.

Sia $r = 2a \cos\theta$ l'equazione del cerchio, il polo essendo O. Abbiamo il teorema delle forze vive

$$v^2 = h - 2\int \varphi(r)\,dr$$

se $\varphi(r)$ è la forza; inoltre

$$\frac{v^2}{a} = R + \varphi(r)\cos\theta.$$

Eguagliando i due valori di v e differenziando si ottiene

$$r\varphi'(r) + 5\varphi(r) = 0$$

donde

$$\varphi(r) = \frac{2c}{r^5}.$$

[SAINT-GERMAIN, l. c., pag. 238].

17. Il problema della brachistocrona.

Un punto si muove, per l'azione di forze che ammettono un potenziale U, su di una curva. Come deve essere questa curva perchè il tempo impiegato a percorrerne un arco sia minimo?

Si ha

$$v^2 = h - 2U(x, y, z) = V^{-2}$$

onde

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{h - 2U}} = \int V\,ds.$$

Annullando la variazione prima di t, giungiamo alle equazioni

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d}{ds}(Vx') = 0, \text{ ecc.};$$

la terza è conseguenza delle prime due, come si vede subito moltiplicando per $x' = \frac{dx}{ds}$, y', z', e sommando. Sviluppando si ha

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{v^3}X, \text{ ecc.},$$

cioè

$$F - P = \frac{dv}{dt} T - \frac{v^2}{\rho} N.$$

Le (5) ci dànno quindi

$$R_b = -F_b = 0, \qquad R_n = -2F_n;$$

la reazione è tutta normale. Si può dare una interpretazione facile di questa ultima.

Ferma restando la F_t (e quindi v) cambio segno alla F_n: supposto P soggetto alla F' simmetrica di F, la reazione è nulla; cioè il punto descrive liberamente la brachistocrona.

Se poi poniamo

$$v = \frac{k^2}{v'}, \qquad dt = \frac{v'^2}{k^2} dt'$$

otteniamo subito

$$F - P = -\frac{k^4}{v'^4}\left(\frac{dv'}{dt'} T + \frac{v'^2}{\rho} N\right),$$

però se

$$F - P = -\left(\frac{k}{v'}\right)^4 (F' - P)$$

otteniamo la brachistocrona liberamente descritta per la forza $F' - P$. Gli stessi risultati si estendono alla brachistocrona su di una superficie. Notiamo le seguenti applicazioni.

Un punto descrive una ellissi sotto l'azione di una forza $\frac{k}{r^2}$ diretta al fuoco: la stessa ellissi è brachistocrona per una forza diretta all'altro fuoco e proporzionale a $\frac{k}{(a-r)^2}$.

In un moto centrale, $v'p = \text{cost.}$; onde le brachistocrone per una forza centrale godono della proprietà che $v = Ap$.

La catenaria è curva liberamente percorsa da un punto soggetto ad una forza normale alla direttrice e che varia come la velocità (vedi Cap. 1°, eserc. 9) cioè proporzionale a z. Nel caso del moto brachistocrono $v = \frac{k^2}{z}$; la funzione delle forze è proporzionale a z^{-2} e la forza a z^{-3}.

Se U e quindi V non contengono x, y, si deduce subito che la curva è piana. Per esempio nel caso del punto pesante

$$v^2 = h - 2gz, \qquad \frac{1}{\sqrt{h - 2gz}} \frac{dx}{ds} = a;$$

donde

$$x' = \sqrt{\frac{z_0 - z}{2a}} \quad \text{e in conseguenza} \quad z' = \sqrt{\frac{2a - z_0 + z}{2a}}$$

da quest'ultima si trae subito

$$s = \text{cost.} + 2\sqrt{2a}\sqrt{2a - z_0 + z}$$

e, trasportando l'origine, $s^2 = 8az$ che (§ 5) definisce una cicloide.

Nel caso della forza parallela a z e proporzionale a z^{-3}, posto che $v = 0$ per $z = \infty$, si ha

$$\frac{dx}{ds} = \frac{a}{z}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{z}\sqrt{z^2 - a^2}$$

$$s = \text{cost.} + \sqrt{z^2 - a^2}$$

e se $s = 0$ per $z = a$, $s^2 = z^2 - a^2$ che definisce una catenaria.

[LORIA, l. c., pag. 474. PASCAL, *Calcolo delle variazioni*, pag. 172. KNESER, l. c., pag. 37-248. JELLETT, *Calculus of Variations* (1850). ROUTH, l. c., pag. 365 e seg. PENNACCHIETTI, Rend. Circ. Mat. Palermo, **5**, **6** (1891-92)].

18. Un punto pesante è mobile su di un piano che ruota uniformemente intorno ad un asse del suo piano. Determinare il moto supponendo l'asse verticale o orizzontale.

Ci varremo delle equazioni generali (2), essendo

$$f = y - x \operatorname{tang} \omega t = 0$$

dove ω è la velocità angolare costante; quindi

$$\ddot{x} = -\lambda \operatorname{tang} \omega t, \qquad \ddot{y} = \lambda, \qquad \ddot{z} = -g;$$

poichè $x\ddot{x} + y\ddot{y} = 0$, cioè nulla la componente di accelerazione secondo raggio vettore nel piano xy, si ha (Vol. 1°, pag. 37)

$$r\ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2 = 0, \qquad \dot{\theta} = \omega;$$

onde

$$r = ae^{\omega t} + be^{-\omega t} = ae^{\theta} + be^{-\theta},$$

equazione di proiezione della traiettoria sul piano xy.

La reazione del piano è

$$\lambda = \ddot{y} = 2\dot{r}\cos\omega t.$$

Nel secondo caso essendo

$$f = z - y \operatorname{tang} \omega t,$$

procedendo come prima si ha

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -g \operatorname{sen} \omega t$$

donde

$$r = ae^{\omega t} + be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t.$$

Se per $t = 0$, è $r = 0$, $\dot{r} = \frac{g}{2\omega}$, risulta $r = \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t$ che rappresenta un cerchio. La traiettoria è un'elica.

19. Moto di un punto pesante su di una retta che ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.

La retta incontri l'asse z sotto un angolo α e ad una distanza a dall'origine: avremo le due equazioni

$$y - x \operatorname{tang} \omega t = 0, \quad x^2 + y^2 - k^2(a - z)^2 = 0 \quad (k = \operatorname{tang} \alpha)$$

e quindi [vedi equaz. (3)]

$$\ddot{x} = -\lambda \operatorname{tang} \omega t + \mu x, \quad \ddot{y} = \lambda + \mu y, \quad \ddot{z} = -g + \mu k^2(a - z).$$

Moltiplicando per x, y, $-(a - z)$, si ha, sommando:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} - (a - z)(\ddot{z} + g) = 0.$$

Ma

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = r\ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2 = -kr\ddot{z} - r^2\omega^2$$

perchè

$$r = k(a - z);$$

onde

$$(1 + k^2)\ddot{z} + g + k^2\omega^2(a - z) = 0.$$

Posto

$$a - z = u, \qquad m^2 = \frac{k^2\omega^2}{1 + k^2} = \omega^2 \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

si ha

$$u = \frac{g}{k^2\omega^2} + A \operatorname{Ch} m(t + \tau); \text{ ecc.}$$

20. Moto di un punto pesante su di una superficie di rotazione ad asse verticale.

Come pel pendolo sferico, avremo

$$v^2 = 2g(h - z), \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$$

e sarà

$$0 < c < vr, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Consideriamo la superficie cubica, di rotazione, C_3

$$(h - z)r^2 = \frac{c^2}{2g}.$$

La r del punto mobile deve essere maggiore della r dei punti di C_3; la quale divide la superficie in zone separate da cerchi.

Il moto avviene in quelle zone che sono più distanti dall'asse che le zone corrispondenti di C_3 e entro una di queste abbiamo un moto analogo al pendolo sferico. La riduzione alle quadrature è immediata. Se C_3 tocca la superficie, il moto avviene in un cerchio in modo uniforme; si può inoltre osservare che la traiettoria è stabile o no secondo che le zone adiacenti sono più o meno lontane dall'asse che la superficie cubica; ecc.

[O. Staude, Acta mathematica, **11**, pag. 303 (1888). Kobb, ibidem., **10**, pag. 89 (1887). Stäckel, Mathem. Annalen, **41**, pag. 571 (1893). Puglisi, Rend. Circolo Mat. di Palermo,

12 (1898), pag. 312. Sono state assegnate tutte le superficie per le quali il problema è riducibile a funzioni ellittiche].

21. Moto dei proiettili lanciati orizzontalmente, tenuto calcolo della rotazione della terra.

Integreremo le (16) colle seguenti condizioni iniziali:

$$t = 0, \; x = y = z = 0; \qquad \dot{x} = \alpha, \; \dot{y} = \beta, \; \dot{z} = \gamma;$$

quindi

$$x = \alpha t - \omega t^2(\beta \cos\lambda + \gamma \operatorname{sen}\lambda) + \frac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda$$

$$y = \beta t + \omega \alpha t^2 \cos\lambda$$

$$z = \gamma t - \frac{1}{2} g t^2 + \omega \alpha t^2 \operatorname{sen}\lambda$$

trascurando ω^2. Se il proiettile è lanciato verso Sud, si ha

$$\alpha = \gamma = 0, \; \beta > 0;$$

onde

$$x = -\omega t^2 \left(\beta \cos\lambda - \frac{1}{3} g t \operatorname{sen}\lambda\right), \; y = \beta t, \; z = -\frac{1}{2} g t^2.$$

Ma essendo β assai grande, t molto piccolo, è

$$\beta \cos\lambda - \frac{1}{3} g t \operatorname{sen}\lambda > 0;$$

abbiamo dunque $x < 0$; cioè una deviazione verso Ovest. Se il tiro fosse verso Nord, $\beta < 0$; avremmo deviazione verso Est.

22. Un punto è attratto da un centro fisso colla legge di Newton; la sua massa è una funzione lineare del tempo. Studiare il moto.

Le equazioni del moto sono

$$m\ddot{x} + \frac{x}{r^3} = 0, \text{ ecc.} \qquad \text{con} \qquad m = a + \alpha t.$$

Si ponga

$$x = m\xi, \qquad y = m\eta, \qquad dt = -m^2 d\tau$$

e inoltre

$$r = m\rho \qquad \left(\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Si trova subito:

$$\dot{x} = \alpha\xi - \frac{1}{m}\frac{d\xi}{d\tau}, \qquad \ddot{x} = \frac{1}{m^3}\frac{d^2\xi}{d\tau^2};$$

e quindi

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} = 0, \text{ ecc.}$$

Il moto del punto (ξ, η) con massa costante è quello già studiato al § 2.

La stessa trasformazione riesce nel caso più generale in cui

$$m = \sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2};$$

ponendo

$$x = m\xi, \qquad y = m\eta, \qquad dt = m^2 d\tau, \qquad n = \frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma$$

risulta

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{\xi}{\rho^3} + n\xi, \text{ ecc.}$$

cioè il punto (ξ, η) di massa costante si muove sotto l'azione di una forza centrale risultante di due altre: una proporzionale alla distanza e una inversamente proporzionale al quadrato della distanza. È un caso particolare di un problema celebre (Cap. 4°, Eserc. 6).

[Mestscersky, *Astron. Nachr.*, **159**, Nr. 3807 (1902)].

CAPITOLO TERZO.

IL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT E LE EQUAZIONI GENERALI DELLA DINAMICA.

§ 1. **Principio di d'Alembert.** — Ammetteremo che, in un qualunque sistema in moto, l'azione che i vincoli esercitano su di un punto P del sistema di massa m, sia rappresentata da una forza di vettore $R-P$ (pressione o reazione vincolare) applicata in P; (*postulato delle pressioni vincolari*). Se $F-P$ è il vettore della forza (esterna) che sollecita P, la 2ª legge del moto ci dà

$$m\ddot{P} = F - P + R - P,$$

per ogni punto del sistema. Ma nella esposizione del principio dei lavori virtuali si è posto il principio (e in alcuni casi anche giustificato) che il lavoro virtuale delle reazioni dei vincoli o pressioni vincolari, è nullo o positivo secondo che gli spostamenti sono invertibili o no; cioè

$$\sum (R-P) | \delta P \geqq 0.$$

In conseguenza

$$(1) \qquad \sum [F - P - m\ddot{P}] | \delta P \leqq 0.$$

Il vettore $m\ddot{P}$ dicesi *forza d'inerzia*; però concludiamo:

Nel moto di un sistema qualunque le forze direttamente applicate e le forze d'inerzia volte in senso contrario, compatibilmente coi vincoli del sistema, sono, in ogni istante, in equilibrio.

Questo principio, col quale ogni questione di Dinamica è ridotta ad una di Statica, è stato stabilito da D'ALEMBERT *.

---

* Tale principio fu enunciato un po' diversamente da D'ALEMBERT [1742 e *Traité de Dynamique*, Paris, 1743, 2me partie, Ch. I]; che riguardava i moti impressi ai sistemi vincolati come composti dei moti effettivi e di altri che vengono distrutti, e stabiliva quindi che il sistema era in equilibrio se fosse stato solamente animato da questi ultimi.

In un caso particolare, il principio era stato già applicato da GIAC. BERNOULLI [*Acta eruditorum*, 1686] nel problema del pendolo composto (Cap. 5°, § 4). L'enunciato attuale è, in fondo, dovuto ad EULER. [Vedi LAGRANGE, *Méc. Analy*. Œuv. comp. II, p. 255; MACH, l. c., p. 316]. Il principio, nel modo con cui è stato dedotto, ha niente altro che una base sperimentale, e costituisce sostanzialmente la generalizzazione della terza legge del moto. [COMTE, *Cours de Phil. positive*, I, 4me édition (1877), pag. 408-9 e 492-3; THOMSON a. TAIT, l. c., I, pag. 248].

Per una critica del modo usuale di giustificare questo principio si veda, tra gli altri, MAGGI, *Stereodinamica*, pag. 80.

Può esporsi in varie forme: così si può anche dire

Il lavoro virtuale delle forze d'inerzia è eguale a quello delle forze esterne, nel caso degli spostamenti invertibili.

Riguardiamo la forza $F - P$ come risultante della forza d'inerzia $m\ddot{P}$ e di un'altra forza $S - P$ che dicesi *forza perduta*; allora

Nel moto di un sistema le forze perdute sono, in ogni istante, in equilibrio.

Nel caso degli spostamenti invertibili, riferendoci ad assi ortogonali, abbiamo:

$$(2) \quad \sum[(X - m\ddot{x})\delta x + (Y - m\ddot{y})\delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z] = 0$$

che è l'*equazione fondamentale della Dinamica.*

Operando sulla (2) allo stesso modo con cui operammo in Statica; tenendo conto delle relazioni cui debbono soddisfare gli spostamenti invertibili, otterremo equazioni del moto nella forma:

$$m\ddot{x} = X + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots, \text{ ecc.},$$

in cui i coefficienti λ, nel corso del moto, debbono conservare segni ben determinati; altrimenti avremmo equazioni di forme diverse.

Nel caso speciale di un sistema olonomo (Vol. 1°, pag. 206), se $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, ... sono le equazioni dei vincoli, le equazioni del moto diventano:

$$m\ddot{u} = \Phi + \sum_{1}^{r} \lambda_i \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial u}, \tag{3}$$

dove $u = x, y, z$ e $\Phi = X, Y, Z$.

Le (3) diconsi *equazioni di* LAGRANGE (1ª *forma*) *.

Le (2) e (3) del capitolo precedente sono un caso particolarissimo di queste.

Le equazioni del moto di un punto pesante su di un cerchio contenuto in un piano verticale zx, col centro nell'origine, sono

$$\ddot{x} = \lambda x, \qquad \ddot{z} = \lambda z - g;$$

dalle quali

$$v^2 = 2g(z_0 - z), \qquad \lambda a^2 = g(3z - 2z_0).$$

A partire dal valore di t per cui $z = \frac{2}{3} z_0$, λ si annulla e cambia di segno: le equazioni precedenti non valgono più; il mobile avendo abbandonato il cerchio, avremo invece

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{z} = -g.$$

In generale le λ sono r funzioni incognite. Se, per fissar le idee, i punti del sistema sono n, avremo n terne di equazioni (3) in cui le λ figurano linearmente. La eliminazione (sempre possibile) delle λ condurrà ad un sistema di $3n - r$ equazioni del 2° ordine che diconsi *equazioni pure del moto*; la cui integrazione, supposte note le forze,

---

* LAGRANGE, l. c., II, pág. 267-77.

dipende da quella di una unica equazione differenziale di ordine $6n - 2r$.

Date le condizioni iniziali, cioè le coordinate iniziali del sistema (in numero di $3n - r$, dovendo verificare le r equazioni dei vincoli) e le componenti delle velocità iniziali, pure in numero di $3n - r$ essendo

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial x}\dot{x} + \cdots = 0,$$

sono individuate completamente le $6n - 2r$ costanti e quindi il moto.

In molti casi poi la sola considerazione del principio conduce a scriver subito le equazioni del moto. Vediamo alcuni esempi *.

a) *Un sistema rigido con un punto fisso O o mobile di moto prestabilito* è un sistema olonomo la cui posizione, determinata quando si conosce quella di una terna connessa col sistema e coll'origine in O, dipende da tre parametri; abbiamo cioè un sistema con *tre* gradi di libertà. Vi ha equilibrio tra le forze esterne e le forze d'inerzia volte in senso contrario; cioè la coppia delle forze esterne, rispetto ad O, è eguale alla coppia delle forze d'inerzia rispetto allo stesso pun-

* MAGGI, *Principii di Stereodinamica*, Milano, 1903, pagina 20 e seg. e pag. 61 e seg.

to. Dunque rispetto ad una terna d'assi fissi si hanno le tre equazioni:

$$\sum m[(y-y_0)\ddot{z}-(z-z_0)\ddot{y}]=M_x, \text{ ecc.}$$

che sono le equazioni pure del moto.

b) *Un sistema rigido un cui punto O resta costantemente su di una superficie fissa o mobile in maniera prestabilita,* è pure un sistema olonomo: la cui posizione resta fissata dalle coordinate di O e dalla solita terna. Abbiamo un sistema con *cinque* gradi di libertà. La risultante delle forze esterne e della pressione di O, è eguale alla risultante delle forze d'inerzia e però rispetto a qualunque retta condotta per O tangente alla superficie e di coseni α, β, γ, avremo

$$\sum m(\alpha\ddot{x}+\beta\ddot{y}+\gamma\ddot{z})=\alpha R_x+\beta R_y+\gamma R_z;$$

mentre per i momenti avremo tre equazioni analoghe a quelle di *a*).

c) *Un sistema rigido mobile intorno ad una retta fissa o mobile di moto prestabilito* è pure un sistema olonomo; a fissarne la posizione basta saper assegnare l'angolo che un piano passante per la retta e connesso col sistema forma con un piano fisso; abbiamo *un* sol grado di libertà. Le reazioni del corpo sulla retta hanno momento nullo rispetto alla retta; quindi il momento delle forze esterne è eguale al momento delle forze d'inerzia rispetto alla retta. Se α, β, γ sono i suoi coseni direttori,

avremo dunque la sola equazione pura del moto

$$\sum m.\alpha[(y-y_0)\ddot{z}-(z-z_0)\ddot{y}]+\cdots=\alpha M_x+\beta M_y+\gamma M_z.$$

d) Un corpo rigido a contorno convesso, è costantemente tangente ad un piano mobile in maniera prestabilita ed inoltre il punto del corpo e del piano che sono a contatto, hanno, in ogni istante, la stessa velocità. In tal caso si dice che il corpo rigido è costretto a rotolare, senza strisciare, sul piano. Abbiamo un sistema *anolonomo* con tre gradi di libertà (Vol. 1°, pag. 211) e le equazioni pure del moto sono le stesse di *a*) perchè il principio di D'ALEMBERT è sempre applicabile.

§ 2. **Della percossa in un sistema vincolato.**— Consideriamo il caso che, all'istante t_0, agiscano sul sistema delle forze istantanee o percosse. Una qualunque di queste (Cap. 1°, § 4) è definita come limite del vettore $\int_{t_0}^{t_1}(F-P)\,dt$, per $t_1=t_0$; limite che supporremo finito e determinato e che accenneremo con $\mathfrak{J}-P$.

Ammetteremo che, soddisfatte certe condizioni, allorquando su di un sistema vengono ad agire forze estremamente grandi in un istante brevissimo, la posizione del sistema vari infinitamente poco, mentre le velocità dei suoi punti variano, in generale, di quantità finite.

Di guisa che l'impulso di ogni punto nell'i-

stante anteriore a t_0 differisce di una quantità finita dallo stesso impulso allo istante posteriore a t_0.

Integriamo la (1) tra t_1 e t_0; avremo

$$\sum\left[\int_{t_0}^{t_1}(F-P)|\delta P.dt - \int_{t_0}^{t_1} m\ddot{P}|\delta P.dt\right] \leqq 0,$$

e supponiamo che le forze, o parte di esse, col tendere di t_1 a t_0, crescano indefinitamente conservando lo stesso segno. Pel secondo teorema della media

$$\int_{t_0}^{t_1}(F-P)|\delta P.dt = \left[\int_{t_0}^{t_1}(F-P)dt\right]|\delta\overline{P},$$

essendo $\delta\overline{P}$ un valore dl δP relativo ad un istante tra t_0 e t_1; però, accennando con δP il valore corrispondente a t_0, il limite della prima espressione è

$$(\mathfrak{J}-P)|\delta P.$$

Inoltre

$$\int_{t_0}^{t_1} m\ddot{P}|\delta P.dt = (m\dot{P}|\delta P)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m\dot{P}|\delta\dot{P}.dt;$$

la quantità sotto il segno integrale a secondo membro si mantiene sempre finita anche col tendere di t_1 a t_0; il limite del primo membro è dunque $\Delta(m\dot{P})|\delta P$, avendo accennato con $\Delta(m\dot{P})$ la differenza finita dei valori dell'impulso relativi a $t_0 \pm \varepsilon$; tale differenza dicesi *perdita dell'impulso*.

Dunque si deduce:

$$(4) \qquad \sum[\mathfrak{J} - P - \Delta(m\dot{P})]|\delta P \leqq 0;$$

In ogni istante vi ha equilibrio tra le forze di percossa e gl'impulsi perduti.

Ciò equivale a dire che

Il lavoro delle forze di percossa dovute ai vincoli è nullo o positivo.

Dalla (4) poi, tenuto conto dei vincoli, si ricavano le stesse conseguenze che abbiamo dedotte dalla (1).

§ 3. **Seconda forma delle equazioni di Lagrange.** — Consideriamo un sistema olonomo con k gradi di libertà; cioè un sistema in cui le coordinate dei vari punti possono esprimersi mediante k variabili indipendenti e anche del tempo, in guisa che le equazioni dei vincoli siano identicamente soddisfatte. Diciamo q una qualunque di queste variabili $q_1, q_2, \ldots$ che diremo *coordinate generali* del sistema; e sia

$$(5) \qquad u = u(q_1, q_2, \ldots t), \qquad u = x, y, z.$$

Sostituendo queste espressioni delle u in una qualunque delle equazioni dei vincoli $\mathfrak{L}_i = 0$, queste sono identicamente soddisfatte e però sarà

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial q} = \sum \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} = 0.$$

Valendoci di queste identità possiamo eliminare le funzioni λ dalle equazioni (3). Moltiplicando infatti queste equazioni per $\frac{\partial u}{\partial q}$ e poscia sommando le equazioni analoghe per tutti i punti del sistema,

si ha

$$\sum m \ddot{u} \frac{\partial u}{\partial q} = \sum \Phi \frac{\partial u}{\partial q} . \tag{6}$$

Poniamo

$$Q = \sum \Phi \frac{\partial u}{\partial q} , \tag{7}$$

e poichè Q ha le stesse dimensioni di Φ, la diremo forza relativa alla coordinata q. (Vedi ancora Capitolo IV, § 2).

Trasformiamo il primo membro di (6); però osserviamo che da (5) si deduce

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots$$

che è della forma

$$\dot{u} = a_0 + a_1 \dot{q}_1 + a_2 \dot{q}_2 + \cdots \tag{8}$$

essendo le a funzioni di q e t. Le $\dot{q}$, cioè le derivate delle coordinate rispetto al tempo, diconsi *componenti generali della velocità* dei punti del sistema.

Le componenti ortogonali della velocità di un punto sono funzioni lineari delle componenti generali delle velocità.

Dalla (8) si deducono due proprietà notevoli: derivando rispetto $\dot{q}_1$, si ha subito

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}_1} = a_1 = \frac{\partial u}{\partial q_1} \tag{9}$$

valida per qualunque valore dell'indice.

Di più:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \cdots;$$

ma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \cdots;$$

onde

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial q_1}. \tag{10}$$

Ciò premesso osserviamo che, identicamente,

$$\ddot{u}\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\dot{u}\frac{\partial u}{\partial q}\right) - \dot{u}\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial q}$$

ed in virtù delle relazioni (9) e (10),

$$\ddot{u}\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\dot{u}\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}}\right) - \dot{u}\frac{\partial \dot{u}}{\partial q}.$$

La (6) diventa

$$\frac{d}{dt}\sum m\dot{u}\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}} - \sum m\dot{u}\frac{\partial \dot{u}}{\partial q} = Q;$$

e questa, posto per compendio,

$$2T = \sum m v^2 = \sum m \dot{u}^2, \tag{11}$$

diventa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \tag{12}$$

Abbiamo la *seconda forma delle equazioni di* LAGRANGE *.

* LAGRANGE, l. c., II, pag. 325 e seg.

La funzione T, essenzialmente positiva, che esprime la semisomma dei prodotti delle masse dei singoli punti pel quadrato della velocità, dicesi, per una ragione che vedremo nel prossimo capitolo, *energia cinetica* del sistema all'istante t. Poichè

$$(13) \qquad 2T = \sum m(a_0 + a_1 \dot{q}_1 + \cdots)^2,$$

T risulta una funzione quadratica delle componenti generali della velocità e i cui coefficienti sono funzioni di q e di t. Considerata sotto questa forma si accenna ancora $T_{\dot{q}}$.

Le equazioni (12) sono in numero eguale ai gradi di libertà del sistema e la loro costruzione è assai semplice, non esigendo che la conoscenza dell'energia cinetica mediante q e $\dot{q}$; esse però non ci abilitano a conoscere le reazioni dei vincoli. Sono equazioni differenziali del secondo ordine valide pei soli sistemi olonomi.

Osserviamo ancora che dalla (7) si ha

$$(14) \quad Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots = \sum \Phi \delta u = \sum (F - P) | \delta P;$$

il primo membro esprime dunque il lavoro virtuale del sistema di forze corrispondente allo spostamento virtuale più generale relativo al tempo t. Espresso tale lavoro mediante le q e le loro variazioni si trovano subito le Q.

Nel caso che le forze ammettano un potenziale U (dipendente dalle sole q ed eventualmente da t), si ha

$$\sum \Phi \delta u = - \delta U$$

e quindi

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial q} . \tag{15}$$

Nel caso dei vincoli indipendenti dal tempo, posto

$$2T = \sum a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s ,$$

la (12) relativa all'indice k si trasforma agevolmente in questa

$$\sum_i a_{ik} \ddot{q}_i + \sum_{r,s} \begin{bmatrix} r & s \\ & k \end{bmatrix} \dot{q}_r \dot{q}_s = Q_k$$

dove

$$2 \begin{bmatrix} r & s \\ & k \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{rk}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_k} .$$

Possiamo ancora risolvere rispetto $\ddot{q}_i$; sia α_{ik} il rapporto tra l'elemento minore di a_{ik} nel discriminante della forma $2T$, al discriminante stesso; otterremo subito

$$\ddot{q}_i + \sum_{r,s} \begin{Bmatrix} r & s \\ & i \end{Bmatrix} \dot{q}_r \dot{q}_s = \sum_k Q_k \alpha_{ik}$$

dove

$$\begin{Bmatrix} r & s \\ & i \end{Bmatrix} = \sum_k \alpha_{ik} \begin{bmatrix} r & s \\ & k \end{bmatrix} .$$

Se il sistema è anolonomo, tra le coordinate q che fissano la posizione del sistema esiste un certo numero di relazioni differenziali, non integrabili, della forma

$$\sum A_{rs} \delta q_s = 0 ;$$

possiamo dire però che un qualunque spostamento

virtuale compatibile coi vincoli, ha la forma

$$\delta u = a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2 + \cdots + a_n \delta q_n$$

essendo le $\delta q_1, \ldots \delta q_n$ tutte arbitrarie. Però l'equazione fondamentale (2) si scinde in queste altre

$$\sum m a_r \ddot{u} = \sum a_r \Phi = Q_r .$$

Ma

$$2T = \sum m \dot{u}^2 = \sum m (a_1 \dot{q}_1 + \cdots)^2 ;$$

quindi essendo

$$\sum m a_r \ddot{u} = \frac{d}{dt} \sum m a_r \dot{u} - \sum m \dot{u} \frac{d a_r}{dt} ,$$

$$\sum m \dot{u} a_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} ,$$

posto

$$R_r = \sum m \dot{u} \frac{d a_r}{dt} ,$$

le equazioni del moto diventano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - R_r = Q_r$$

che tengono luogo delle (12).

Ma osserviamo che

$$\ddot{u} = a_1 \ddot{q}_1 + \dot{a}_1 \dot{q}_1 + \cdots ;$$

onde

$$a_r = \frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{q}_r} .$$

Però

$$\sum m a_r \ddot{u} = \sum m \ddot{u} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{q}_r} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} ,$$

dove

$$2S = \sum m \ddot{u}^2,$$

cioè S è formata colla accelerazione allo stesso modo che T colla velocità. Le equazioni assumono la forma di APPELL

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} = Q_r \text{ *}.$$

§ 4. **Equazioni di Hamilton.** — Sviluppando la (13) otterremo $2T$ espresso come somma di due parti: una quadratica omogenea nelle $\dot{q}$; l'altra lineare; cioè

$$(16) \quad \begin{cases} 2T_{\dot{q}} = P_{11}\dot{q}_1^2 + P_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + 2P_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + 2(\alpha_0 + \alpha_1\dot{q}_1 + \cdots), \end{cases}$$

in cui tutti i coefficienti dipendono dalle coordinate q e dalla distribuzione delle masse. Nel caso di un punto libero, le componenti dell'impulso $m\dot{x}, \ldots$ (Cap. 1°, § 4) sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti della velocità, come si verifica subito. In generale diremo *componenti dell'impulso di un sistema, le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti generali delle velocità.*

Accennandole con p_r, porremo

$$(17) \qquad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}.$$

---

* APPELL, Comp. Rend. 1899; oppure: *Les mouvements de roulement en Dynamique.* Coll. Scientia, 1899, pag. 46. MAGGI, l. c., pag. 199.

e quindi

$$(18) \quad p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \cdots + \alpha_1, \text{ ecc.}$$

In un sistema olonomo le componenti dell'impulso sono funzioni lineari delle componenti generali delle velocità.

Il determinante delle (18) non è altro che il discriminante della parte T_2, di T, che è quadratica ed omogenea nelle $\dot{q}$.

Se le u non contengono esplicitamente t, T si riduce a T_2 ed il discriminante è diverso da zero. Nè può esser zero nel caso generale, chè altrimenti, supponendo t costante, potremmo considerare uno spostamento virtuale del sistema capace di annullare T.

Il sistema (18) è quindi risolubile rispetto alle $\dot{q}$; cioè

Le componenti generali delle velocità sono funzioni lineari delle componenti dell'impulso.

Sostituendo nella (13) le espressioni delle $\dot{q}$ mediante le p otterremo T espresso con una forma quadratica delle p, i cui coefficienti sono funzioni delle q e di t. L'accenneremo con T_p.

Teniamo poi presente che essendo arbitrarie le coordinate e le velocità iniziali, cioè le q e $\dot{q}$, e potendo considerare un istante qualunque come iniziale, potremo all'istante t riguardare come assolutamente arbitrarie ed indipendenti le q e le p.

Ciò posto consideriamo la seguente funzione

delle q e p:

(19) $$\Theta = \sum p\dot{q} - T.$$

Attribuendo accrescimenti arbitrarî δp, δq alle p e q, (t essendo invariabile), abbiamo

$$\delta\Theta = \sum\left(p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - \frac{\partial T}{\partial q}\delta q - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right),$$

cioè, per le (17),

$$\delta\Theta = \sum\left(\dot{q}\delta p - \frac{\partial T}{\partial q}\delta q\right);$$

quindi

$$\frac{\partial\Theta}{\partial p} = \dot{q}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial q} = -\frac{\partial T}{\partial q}.$$

Il sistema (12), dopo ciò, si trasforma in questo

(20) $$\dot{p} = Q - \frac{\partial\Theta}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial\Theta}{\partial p}.$$

Abbiamo un sistema di $2r$ equazioni differenziali di primo ordine, che sostituisce completamente il sistema delle r equazioni differenziali (12) di Lagrange, di 2° ordine.

Se le forze derivano da un potenziale U (funzione delle sole q ed eventualmente del tempo), da (15), posto

(21) $$H = \Theta + U,$$

risulta

(22) $$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

È notevolissimo il caso in cui i vincoli sono indipendenti dal tempo; cioè in cui le u si esprimono solamente per le q.

Si deduce subito, dalle (8), che $a_0 = 0$ e quindi T è una funzione quadratica omogenea delle $\dot{q}$ e le p sono pure funzioni lineari ed omogenee delle $\dot{q}$. Dal teorema di EULER sulle funzioni omogenee si ha

$$2T = \sum \dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum p \dot{q};$$

quindi risulta

$$\Theta = T_p$$

dalla (19); la seconda delle (20) ci dà allora

$$\dot{q} = \frac{\partial T_p}{\partial p}. \tag{23}$$

Le componenti generali della velocità sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti dell'impulso.

Le (20) diventano

$$\dot{q} = \frac{\partial T_p}{\partial p}, \qquad \dot{p} = Q - \frac{\partial T_p}{\partial q};$$

e, nell'ipotesi che le forze derivino da un potenziale U, posto

$$H = T_p + U, \tag{21'}$$

si ha

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{22'}$$

Le (22) o le (22') diconsi *equazioni canoniche o di* HAMILTON *; per formare queste equazioni

---

* HAMILTON, *Second Essay on a General Method in Dynamics.* Phil. Trans. Part. I, 1835, pag. 95-144.

occorre conoscere solamente H in funzione delle coordinate e degli impulsi.

Nell'ipotesi delle (22') e supponendo che U e quindi H non contenga esplicitamente t, si ha

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} \right) = 0;$$

però $H = h =$ cost. è un integrale delle (22'), di cui nel prossimo capitolo vedremo il significato meccanico.

Esercizi.

1. Equazioni del moto di un punto in coordinate polari.

La posizione del punto (di massa 1) sia data mediante le coordinate r, θ, φ; si ha

$$2\,T = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta . \dot{\varphi}^2.$$

Siano R, Θ, Φ le componenti della forza secondo il raggio vettore, e le tangenti al meridiano e al parallelo; poichè δP ha per componenti, secondo quelle direzioni, δr, $r \delta \theta$, $r \operatorname{sen} \theta \delta \varphi$, avremo, posto $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$,

$$\begin{aligned} Q_1 \delta r + Q_2 \delta \theta + Q_3 \delta \varphi &= \sum (F - P) | \delta P \\ &= R \delta r + r \Theta \delta \theta + r \operatorname{sen} \theta \Phi \delta \varphi. \end{aligned}$$

Le equazioni (12) dànno

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \operatorname{sen}^2 \theta . \dot{\varphi}^2 = R,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta . \dot{\varphi}^2 = \Theta r,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta . \dot{\varphi}) = \Phi r \operatorname{sen} \theta.$$

Pel moto di un punto in un piano invece

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = R, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \Theta r.$$

(Vol. 1°, pag. 37 e 49).

2. Un punto libero si muove sotto l'azione di forze deducibili da un potenziale della forma

$$-U = f_1(r) + \frac{f_2(\theta)}{r^2} + \frac{f_3(\varphi)}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Provare che la determinazione del moto dipende dalle quadrature.

Poichè $\Phi = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{d f_3(\varphi)}{r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi}$, la terza dell'esercizio precedente con una integrazione dà

$$\frac{1}{2}(r^2 \operatorname{sen}^2\theta . \dot{\varphi})^2 = f_3(\varphi) + A.$$

La seconda invece dà

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta . \dot{\varphi}^2 = \frac{d f_2(\theta)}{d\theta} . \frac{1}{r^2} - \frac{2 f_3(\varphi)\cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^3\theta}.$$

Eliminando $\dot{\varphi}$ ed integrando

$$\frac{1}{2}(r^2\dot{\theta})^2 = -\frac{A}{\operatorname{sen}^2\theta} + f_2(\theta) + B.$$

Il teorema delle forze vive ci dà poi

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + 2U = h;$$

eliminando $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$, otteniamo

$$\dot{r}^2 + \frac{2B}{r^2} = 2 f_1(r) + h$$

che con una quadratura ci darà r mediante t; ecc.

[ROUTH, l. c., pag. 307].

3. Un'asta, di cui si trascura la massa, è situata in un piano orizzontale e può ruotare intorno ad un suo estremo fisso O; essa sostiene due masse: una m fissa nell'estremo libero A; l'altra

m' puo scorrere lungo OA; movimento del sistema.

Sia $OA = a$; e la posizione di m' sia fissata dalle coordinate polari r, θ. L'energia cinetica di m è $\frac{1}{2} a^2 \dot{\theta}^2$; quella di m' è $\frac{1}{2} m'(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$; onde

$$2T = (ma^2 + m'r^2)\dot{\theta}^2 + m'\dot{r}^2 .$$

Le equazioni del moto sono

$$m'\ddot{r} - m'r\dot{\theta}^2 = 0, \quad \frac{d}{dt}[(ma^2 + m'r^2)\dot{\theta}] = 0.$$

Dalla seconda

$$(ma^2 + m'r^2)\dot{\theta} = c_1$$

e sostituendo nella prima

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{r c_1^2}{(ma^2 + m'r^2)^2};$$

donde

$$\dot{r} = c_2 - \frac{c_1^2}{m'} \frac{1}{ma^2 + m'r^2}.$$

Con una nuova quadratura si troverà r mediante t, ecc. Gli integrali trovati possono interpetrarsi agevolmente (Capit. 4°, § 4, 7).

[Clairaut, Mém. Ac. d. Sciences de Paris, 1742].

4. Una massa m posta in A scorre su di una retta, ed è collegata ad un'altra m' posta in B, mediante un'asta di cui si trascura la massa; studiare il moto del sistema, posto in un piano orizzontale.

Sia O un punto della retta; $OA = x$, $AB = a$, e l'angolo $OAB = \theta$.

L'energia cinetica di A è $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$; per quella di B, osserviamo che la sua velocità v è la risultante di quella dovuta

alla traslazione del sistema parallelamente ad x (ed eguale ad $\dot{x}$) e di quella dovuta alla rotazione intorno a B ed eguale ad $a\dot{\theta}$. Queste due componenti comprendono un angolo $90^\circ - \theta$; quindi

$$v^2 = a^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta.$$

L'energia cinetica del sistema è

$$2T = m\dot{x}^2 + m'(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta);$$

e le equazioni del moto sono

$$\frac{d}{dt}[(m + m')\dot{x} + m'a\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta] = 0$$

$$\frac{d}{dt}[m'a^2\dot{\theta} + m'a\dot{x}\operatorname{sen}\theta] - m'a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta = 0.$$

Dalla prima ricaviamo

$$(m + m')\dot{x} + m'a\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta = c_1$$

(integrale centro di massa parallelamente ad x. Cap. 4°, § 7); sviluppando la seconda si ha

$$a^2\ddot{\theta} + a\ddot{x}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Ma $(m + m')\ddot{x} = - m'a(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$; eliminando $\ddot{x}$ si ha

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{m'\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{m + m'\cos^2\theta}.$$

Integrando

$$\dot{\theta} = \frac{c_2}{\sqrt{m + m'\cos^2\theta}},$$

la quale definisce un moto pendolare (Cap. 2°, § 4); ecc.

[CLAIRAUT, Mém. Ac. d. Sciences de Paris, 1736].

5. Moto di un punto situato su di una sfera ed attratto dal polo Nord con una forza il cui potenziale è $k\cot\theta$.

Posto il raggio della sfera eguale ad uno, abbiamo (esercizio 1°) le equazioni

$$\ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = \frac{k}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}^2\theta . \dot{\varphi}) = 0.$$

Trasformiamole ponendo

$$\rho = \operatorname{tang} \theta, \qquad dt = \cos^2 \theta . dt_1 ;$$

ρ è la distanza da N della proiezione P_1 di P dal centro sul piano tangente in N alla sfera. Le equazioni del moto si trasformano agevolmente in queste:

$$\frac{d^2 \rho}{d t_1^2} - \rho \left(\frac{d \varphi}{d t_1} \right)^2 = \frac{k}{\rho^2}, \qquad \frac{d}{d t_1} \left(\rho^2 \frac{d \varphi}{d t_1} \right) = 0$$

che definiscono il moto del punto P_1 attratto da N in ragion inversa del quadrato della distanza. La traiettoria di P_1 è una conica di cui N è un fuoco: quella di P è dunque una conica sferica avente un fuoco in N. La trasformazione adoperata vale qualunque sia la forza.

[APPELL, l. c. **1**, pag. 499-500; NEUMANN, Berichte d. k. Ges. Leipzig (1879), p. 53-64].

6. Un filo flessibile ed inestensibile, lungo l, congiunge attraverso un foro O praticato in un piano orizzontale due masse m ed m'; m giace sul piano. Studiare il moto.

Se rispetto ad O le coordinate di m sono r, θ, la distanza di m' da O è $l - r$; onde

$$2 T = m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m' \dot{r}^2.$$

Le equazioni del moto sono:

$$(m + m')\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = - m' g, \qquad \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0;$$

esse definiscono il moto di m attratto da O secondo la legge delle aree.

La forza è espressa da

$$F = - m(\ddot{r} - r \dot{\theta}) = \frac{m m'}{m + m'} (g + c^2 r^{-3}).$$

La riduzione alle quadrature si fa osservando che

$$(m + m')\dot{r} d \dot{r} = \left(\frac{m c^2}{r^3} - g m' \right) d r; \text{ ecc.}$$

[THOMSON, l. c. **1**, pag. 309; SCHELL, l. c. **2**, pag. 551].

7. Un punto pesante si muove su di un cilindro circolare retto il cui asse è inclinato di un angolo α sulla verticale. Determinare il moto.

Pel punto P si conduca un piano normale all'asse e che sega il cilindro secondo un cerchio. Le variabili siano: la distanza r del cerchio da un punto fisso dell'asse (origine); l'angolo φ che il raggio passante per P forma con un piano fisso. Si ha

$$2T = m(\dot{r}^2 + a^2\dot{\varphi}^2), \quad z = r\cos\alpha + a\cos\varphi \operatorname{sen}\alpha;$$

$$Q_r = -mg\frac{\partial z}{\partial r} = -mg\cos\alpha,$$

$$Q_\varphi = -mg\frac{\partial z}{\partial \varphi} = mga\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi.$$

Onde

$$\ddot{r} = -g\cos\alpha, \quad a^2\ddot{\varphi} = ag\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi.$$

Il moto secondo l'asse del cilindro è uniformemente accelerato con l'accelerazione $g\cos\alpha$; secondo il cerchio è pendolare con accelerazione $g\operatorname{sen}\alpha$.

8. Due masse m, m_1 si muovono su due rette concorrenti in O e si attraggono in ragion diretta della distanza. Studiare il moto, trascurando il peso delle masse.

Dette r ed r_1 le distanze rispettive di m, m_1 da O, ρ la loro distanza, α l'angolo delle due rette si ha

$$2T = m\dot{r}^2 + m_1\dot{r}_1^2; \quad Q_r dr + Q_{r_1} dr_1 = -k^2\rho\,d\rho$$

cioè, essendo

$$\rho\,d\rho = r\,dr + r_1\,dr_1 - \cos\alpha(r_1\,dr + r\,dr_1),$$

risultano le equazioni

$$\ddot{r} = h^2(-r + r_1\cos\alpha), \quad \ddot{r}_1 = h_1^2(-r_1 + r\cos\alpha)$$

dove $h^2 = mk^2$, $h_1^2 = m_1k^2$. Eliminando r (o r_1) si ha

$$r^{\text{IV}} + r''(h^2 + h_1^2) + rh^2h_1^2\operatorname{sen}^2\alpha = 0.$$

La r si compone di una combinazione lineare di $\frac{\cos}{\text{sen}}\mu t$, $\frac{\cos}{\text{sen}}\nu t$; il moto di m (e di m_1) è una sovrapposizione di moti armonici.

9. Equazioni canoniche del pendolo sferico.

Se il punto ha massa uno e la sfera raggio uno, si ha

$$2T = \dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta \, . \, \dot{\varphi}^2; \quad (q_1 = \theta, \ q_2 = \varphi)$$

$$Q_1 d\theta + Q_2 d\varphi = Z d\chi = g \,\text{sen}\,\theta \, d\theta.$$

Le equazioni di LAGRANGE sono

$$\ddot{q}_1 - \text{sen}\, q_1 \cos q_1 \, . \, \dot{q}_2 = g \,\text{sen}\, q_1 \, , \quad \frac{d}{dt}(\text{sen}^2 q_1 \, . \, \dot{q}_2) = 0.$$

Le componenti dell'impulso sono

$$p_1 = \dot{q}_1 \, , \quad p_2 = \text{sen}^2 q_1 \, . \, \dot{q}_2$$

quindi posto

$$H = T_p + U = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + \frac{1}{\text{sen}^2 q_1} p_2^2\right] + g \cos q_1 \, ,$$

abbiamo le equazioni canoniche

$$\dot{q}_1 = p_1 \, , \quad \dot{q}_2 = \frac{1}{\text{sen}^2 q_1} p_2 \, ,$$

$$\dot{p}_1 = g \,\text{sen}\, q_1 + \frac{p_2^2 \cos q_1}{\text{sen}^3 q_1} \, , \quad \dot{p}_2 = 0.$$

Due integrali sono $H = h$ (delle forze vive) e $p_2 = c$ (delle aree: Cap. 4°, § 4, 7); ecc.

10. Su due rette concorrenti in O e contenute in un piano verticale sono situate due masse m, m_1, congiunte con un filo flessibile e inestendibile che si accavalcia in O su di una piccola carrucola. Studiare il moto.

Posto $Om = x$, $Om' = x_1$, $x + x_1 = l$ e detti α ed α_1 gli angoli che le due rette fanno colla verticale, osserviamo che il lavoro virtuale delle forze d'inerzia è

$$m\ddot{x}\,\delta x + m_1\ddot{x}_1\,\delta x_1 = (m + m_1)\ddot{x}\,\delta x;$$

il lavoro dei pesi è

$$m g \cos\alpha\,\delta x + m_1 g \cos\alpha_1\,\delta x_1 = g(m\cos\alpha - m_1\cos\alpha_1)\,\delta x$$

e però l'equazione del moto è

$$\ddot{x} = g\frac{m\cos\alpha - m_1\cos\alpha_1}{m + m_1} = \text{cost.}$$

Il moto di m è uniformemente accelerato, purchè

$$m\cos\alpha \neq m_1\cos\alpha_1\,;$$

l'equazione precedente poi vale fin tanto che m ed m_1 giacciono ognuno su ciascuna retta.

[SAINT-GERMAIN, l. c., pag. 428].

11. Stesso problema supponendo il filo sostituito da una catena omogenea pesante.

Se diciamo dl, dl_1 rispettivamente due elementi di Om, Om_1 e quindi rappresentiamo con $m\,dl$, $m\,dl_1$ le loro masse, procedendo come prima si ha

$$\int_0^x (m g\cos\alpha - m\ddot{x})\,dl = \int_0^{x_1} (m g\cos\alpha_1 - m\ddot{x}_1)\,dl_1\,;$$

donde, posto come prima $l = x + x_1$,

$$-l\ddot{x} = g[(l - x)\cos\alpha_1 - x\cos\alpha],$$

il cui integrale è

$$x = \frac{l\cos\alpha_1}{\cos\alpha + \cos\alpha_1} + A\,\mathrm{Ch}\,k(t + \tau)$$

dove

$$k^2 = \frac{g(\cos\alpha + \cos\alpha_1)}{l}.$$

[SAINT-GERMAIN, l. c., pag. 431].

CAPITOLO QUARTO.

TEOREMI GENERALI SUL MOTO DI UN SISTEMA.

§ 1. — **Lavoro. Energia potenziale.** — Quando si produce un cambiamento nella configurazione di un sistema, in opposizione a forze che si oppongono a tale cambiamento, si dice che si compie un lavoro. Così p. es., se si solleva un kg. all'altezza di un metro dal suolo si è consumata una certa quantità di lavoro (chilogrammetro); a sollevare lo stesso peso di un altro metro (ritenuta costante la gravità) si richiede la stessa quantità di lavoro e così via; in generale diciamo che *una forza costante f che agisce su di un punto materiale, nel senso del moto, producendo uno spostamento s, compie un lavoro misurato da fs.*

Se la forza non è costante, potremo ritenerla tale in ogni tratto infinitesimo della traiettoria rettilinea del mobile (asse x): il prodotto $f\,dx$ dicesi *lavoro elementare* della forza; e la somma dei lavori elementari compiuti nello spostamento $b - a$,

cioè $\int_a^b f \, . \, dx$, misura il lavoro totale compiuto dalla forza variabile f nel passaggio del mobile dalla posizione a alla posizione b.

Supponiamo ora che una forza variabile in grandezza e direzione solleciti un punto mobile P; in un elemento ds di traiettoria possiamo riguardare la forza costante. Il prodotto della forza per lo spostamento elementare nella direzione della forza, cioè *il prodotto scalare della forza e dello spostamento del punto d'applicazione*

$$(1) \qquad (F - P) | dP,$$

dicesi *lavoro elementare*. Per tal lavoro vale quindi quanto fu detto pel lavoro virtuale (Vol. 1°, pagina 212); dal quale differisce solamente perchè lo spostamento di P è ora l'effettivo spostamento subìto dal punto nel tempo dt.

La somma dei lavori elementari compiuti da una forza nel passaggio del punto mobile da una posizione a ad un'altra b, dicesi *lavoro totale*: è quindi espresso da

$$(2) \qquad \mathfrak{L}_{ab} = \int_a^b (F - P) | dP.$$

Considerando finalmente un sistema qualunque soggetto a forze, diremo lavoro elementare delle forze del sistema la somma algebrica dei lavori elementari delle singole forze. Lo rappresenteremo con $d\mathfrak{L}$ (attribuendo però a questa nota-

zione il significato di incremento infinitesimo); quindi

$$(3) \qquad d\mathfrak{L} = \sum (F - P) | dP,$$

in cui la sommatoria può essere sostituita da un integrale.

Finalmente il lavoro compiuto dalle forze di un sistema nel passaggio da una configurazione, che accenno con a, ad un'altra b, è espresso da

$$(4) \qquad \mathfrak{L}_{ab} = \int_a^b \sum (F - P) | dP.$$

Nel sistema di misure assolute l'unità di lavoro è l'*erg*; cioè il lavoro che si deve compiere per spostare di un cm. il punto d'applicazione di una dine. L'equazione di dimensione del lavoro è

$$[L] = [m, l^2, t^{-2}].$$

In generale il calcolo del lavoro esige una quadratura; ma la forza dipende dalla posizione e dalla velocità del punto di applicazione e dal tempo; però per eseguire tale quadratura occorre aver espresso questi elementi per il tempo; occorre cioè aver già risoluto il problema del moto.

Ora nella maggior parte dei casi che si presentano in natura, ha luogo questa notevole circostanza: *il calcolo del lavoro non esige la conoscenza del calcolo del movimento.* Ciò avviene quando *il lavoro elementare delle forze di un sistema è il differenziale esatto di una funzione uniforme* (cioè *ad un sol valore, finita, continua e che ammette le de-*

rivate prime) delle variabili che individuano la posizione del sistema: cioè

$$(5) \qquad \sum (F - P) | dP = - d\Pi.$$

Poichè si chiama *energia* di un sistema l'attitudine a compiere un lavoro, la funzione Π dicesi *energia di posizione,* cioè dipendente dalla sola posizione del sistema, o *energia potenziale.*

Il lavoro compiuto dalle forze del sistema nel passaggio dalla configurazione a alla b, è in tal caso espresso da

$$\mathfrak{L}_{ab} = -(\Pi_b - \Pi_a) = \Pi_a - \Pi_b,$$

cioè *il lavoro è espresso dal decremento della energia potenziale.*

Esso quindi (per le supposte proprietà di Π) è indipendente dalle posizioni intermedie del sistema, ma dipende solamente dalla posizione iniziale e finale ed è nullo se esse coincidono.

Tali sistemi di forze diconsi *conservativi.*

La funzione Π è definita a meno di una costante; se scegliamo questa costante in modo che p. es. $\Pi_b = 0$, allora l'energia potenziale in a è il lavoro compiuto dalle forze nel passaggio del sistema da a in b.

§ 2. **Esempi di sistemi conservativi.** — Se $q_1, q_2, \ldots$ sono le coordinate generali di un sistema, il secondo membro della (3) è riducibile alla forma

$$\sum Q\,dq;$$

potrà quindi, colle regole del calcolo, riconoscersi se questa espressione è un differenziale esatto di una funzione e, nel caso, trovarla. Teniamo poi presente che se $\sum (F - P)|dP$ è un differenziale esatto indipendentemente dai vincoli, sarà pure differenziale esatto $\sum Q\,dq$; ma non reciprocamente.

In ogni caso poi supposte costanti tutte le q, ad eccezione di q_1, si vede che Q_1 riceve questa notevole interpetrazione: è il rapporto tra il corrispondente lavoro delle forze e l'incremento della variabile q_1; ciò che giustifica la precedente denominazione di Q_1 (Cap. 3°, § 3).

Nel caso più frequente il primo membro della (5) risulta un differenziale esatto indipendentemente dai vincoli: come p. es., nel caso di un punto pesante o, più generalmente, quando le forze non dipendono che dalla posizione del sistema e derivano da un potenziale U; cioè esiste una funzione U delle sole coordinate dei punti del sistema (eventualmente anche del tempo) e tale che

$$F - P = -\left(I\frac{\partial U}{\partial x} + J\frac{\partial U}{\partial y} + K\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U.$$

In tal caso Π differisce da U per una costante.

Le forze potrebbero essere risultanti di forze derivabili da un potenziale e di altre dipendenti dalla velocità, e il cui lavoro è nullo. Così p. es., se nel moto di un punto libero o su di una superficie o curva fissa, si ha

$$F - P = -\nabla U + |K\dot{P},$$

dove K è un vettore qualunque; la 2ª forza, normale alla direzione del moto, compie un lavoro elementare nullo e quindi

$$\sum (F - P)|dP = -dU \ *.$$

Nel caso del moto di un punto pesante, il lavoro compiuto dalla gravità nel passaggio dalla posizione corrispondente all'altezza a all'altezza b, è dato da $mg(b-a)$; quindi $\Pi = mgz$, scegliendo l'asse z come al solito.

Un altro caso notevole è il seguente.

Due masse m, m' esercitano tra loro un'azione diretta secondo la congiungente i due punti (centri delle masse) funzione della sola distanza e proporzionale alle masse; espressa cioè da $mm'\varphi(r)$. Riterremo $\varphi(r) > 0$ se i due punti si respingono, cioè se r tende ad aumentare, mentre $\varphi(r) < 0$ nel caso dell'attrazione. È facile calcolare il lavoro elementare; se I è un vettore unità parallelo alla congiungente dei due punti P, P', si ha

$$P - P' = Ir \qquad (P - P')|d(P - P') = r\,dr,$$
$$I|d(P - P') = dr.$$

Ma il lavoro elementare è espresso da

$$mm'\varphi(r)I|d(P - P');$$

* HELMHOLTZ, *U. die Erhaltung der Kraft* (1847) in Ostwald's Klassiker der ex. Wiss. Nr. 1. L'osservazione è di LIPSCHITZ, vedi ibidem, p. 55.

quindi anche da $m\,m'\,\varphi(r)\,d\,r$. Posto

$$\Pi(r) = m\,m' \int_r^\rho \varphi(r)\,d\,r$$

in cui ρ è una costante, il lavoro elementare è eguale a $-d\,\Pi$; dunque Π, definita a meno di una costante, è l'energia potenziale del sistema. Il lavoro compiuto dalle forze di attrazione o repulsione, nel passaggio dalla posizione in cui le due masse m, m' sono alla distanza r, a quella in cui la distanza è r', è dato da

$$\mathfrak{L}_{rr'} = \Pi(r) - \Pi(r').$$

Posto

$$\mathfrak{P} = m\,m' \int_r^\infty \varphi(r)\,d\,r,$$

nell'ipotesi che $\varphi(r)$ sia integrabile tra r ed ∞, si vede subito che $\mathfrak{P}$ differisce da Π per una costante e quindi

$$\mathfrak{L}_{rr'} = \mathfrak{P}(r) - \mathfrak{P}(r'),$$

in particolare

$$\mathfrak{L}_{r\infty} = \mathfrak{P}(r).$$

$\mathfrak{P}$ dicesi potenziale del sistema (delle due masse) su sè stesso o *autopotenziale*, e rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del sistema nel passaggio dalla posizione attuale a quella in cui i due punti sono a distanza infinita tra loro; in cui, come dicesi, il sistema è disgregato. Tanto Π che $\mathfrak{P}$ dipendono, in tal caso, dalla sola posizione reciproca delle due masse e permettono, con semplici derivazioni, di

assegnare la forza. Una delle due masse potrebbe ancora supporsi fissa.

Le stesse cose si estendono subito ad un sistema di punti che a due a due esercitano un'azione diretta secondo la loro congiungente, proporzionale alle masse e funzione della sola distanza; e, più generalmente, a due sistemi di masse m, m' soggette alle stesse forze.

Posto

$$\mathfrak{P} = \sum m\, m' \int_r^\infty \varphi(r)\, dr,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le masse dei due sistemi, $\mathfrak{P}$ rappresenta il lavoro compiuto dalle azioni mutue dei due sistemi allorchè si passa dalla posizione attuale, a quella in cui i due sistemi sono a distanza infinita tra loro e dicesi *potenziale mutuo.*

Se il secondo sistema si riduce ad una sola massa m' posta in P, avremo:

$$\mathfrak{P} = m' \sum m \int_r^\infty \varphi(r)\, dr.$$

Per un dato sistema di masse m, la sommatoria non dipende che dalla posizione del punto P; pongasi

$$V = \sum m \int_r^\infty \varphi(r)\, dr.$$

V dicesi *funzione potenziale* del sistema in P (punto *potenziato*); allora

$$\mathfrak{P} = m' V$$

e se $m' = 1$, è $V = \mathfrak{P}$:

§ 4. **Teorema ed integrale della conservazione dell'energia.** — Dalla espressione (3) del lavoro elementare, e dalla (6) per l'incremento dell'energia cinetica di un sistema, risulta

$$d\mathfrak{L} - d\,T = \sum (F - P - m\ddot{P})|d\,P.$$

Il secondo membro, in virtù dell'equazione fondamentale della Dinamica (Cap. 3°, § 1, for. 1), è nullo se *tra gl'infiniti sistemi di spostamenti virtuali invertibili è compreso anche lo spostamento effettivo all'istante t, cioè se $d\,P = \delta P$.*

Quando sussiste tale proprietà, che, come vedremo subito, non ha luogo per qualunque sistema, diremo che *il sistema ha vincoli indipendenti dal tempo.* In tale ipotesi risulta

$$(7)\quad d\mathfrak{L} - d\,T = 0, \quad \text{oppure} \quad \mathfrak{L}_{ab} = T_b - T_a;$$

la quale, tenuto conto delle dimensioni, è una relazione omogenea.

In un sistema, a vincoli indipendenti dal tempo, l'incremento della energia cinetica è eguale al lavoro compiuto dalle forze esterne nel passaggio del sistema da una posizione a ad un'altra b.

Questa relazione notevolissima tra energia cinetica e lavoro non permette però, in generale, di conoscere nè il lavoro, nè l'energia cinetica se non è conosciuto il moto.

In quanto ai vincoli osserviamo che: in un sistema di punti liberi e in un sistema rigido libero, tra gl'infiniti sistemi di spostamenti invertibili (cioè

conciliabili coi vincoli) è anche compreso lo spostamento effettivo all'istante t. Ma ciò non accade per ogni sistema vincolato; a convincersene basta, ad es., considerare il moto di un punto su di una superficie: gli spostamenti virtuali invertibili sono sempre contenuti sulla superficie; lo spostamento effettivo è contenuto sulla superficie se questa è fissa ed è esterno alla posizione da essa occupata all'istante t, se è mobile.

Limitiamoci alla considerazione dei sistemi olonomi e sia $\mathfrak{F} = 0$ l'equazione di uno dei vincoli; la quale conterrà le coordinate u di uno almeno dei punti ed il tempo t; cioè:

$$\mathfrak{F}(u, \ldots, t) = 0.$$

Uno spostamento virtuale invertibile, all'istante t, è tale che

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} \delta u = 0$$

(Vol. 1°, pag. 209). Lo spostamento effettivo invece essendo tale che

$$\mathfrak{F}(u + du, \ldots, t + dt) = 0,$$

deve soddisfare alla

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} du = 0.$$

Se dunque $dP = \delta P$ e quindi $du = \delta u$, deve essere $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = 0$, e reciprocamente; e poichè lo

stesso può dirsi per ogni altra equazione, così concludiamo:

Perchè tra gl'infiniti sistemi di spostamenti invertibili di un sistema olonomo, al tempo t, sia compreso lo spostamento effettivo è necessario e basta che le equazioni dei vincoli non contengano esplicitamente il tempo.

Ciò giustifica pienamente la locuzione di « *sistemi a vincoli indipendenti dal tempo* » adoperata per ogni sistema per cui $dP = \delta P$.

Supponiamo ora conservativo il sistema delle forze esterne che sollecita un sistema a vincoli indipendenti dal tempo e sia Π l'energia potenziale. Poichè $\mathfrak{L}_{ab} = \Pi_a - \Pi_b$, da (7) risulta

$$\Pi_b + T_b = \Pi_a + T_a;$$

e poichè la posizione a del sistema è arbitraria, si ha:

In un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, soggetto a forze conservative, la somma della energia cinetica e dell'energia potenziale, cioè l'energia totale del sistema, è costante per tutta la durata del moto.

Tale energia dunque è una quantità che non può essere aumentata, nè diminuita: l'energia cinetica, quindi, aumenta o diminuisce di quanto diminuisce o aumenta l'energia potenziale: cioè l'una si trasforma nell'altra o si risolve in un lavoro.

Questo è il *principio della conservazione dell'energia* dimostrato per i sistemi materiali e che, colla

scoperta di altre forme di energia, si è esteso a tutte le energie e costituisce una delle leggi fondamentali della natura *.

Nel moto di un punto pesante, libero o mobile su di una curva o superficie fissa, si ha dunque sempre

$$m v^2 + 2 m g z = \text{cost.}$$

Nel moto di un sistema di punti soggetti a forze centrali, ecc. (§ precedente) si ha

$$T + \mathfrak{P} = T_0 + \mathfrak{P}_0;$$

se quindi la posizione iniziale non è di equilibrio e le velocità iniziali sono nulle, si ha $T_0 = 0$, $T = \mathfrak{P}_0 - \mathfrak{P}$; cioè

Il potenziale ha tendenza a diminuire.

In generale poi la relazione

$$T + \Pi = h = \text{cost.} \tag{8}$$

è un integrale primo delle equazioni del moto, quadratico rispetto alle componenti della velocità.

Nei sistemi con un sol grado di libertà, soggetti a forze dipendenti dalla sola coordinata q,

* HUYGHENS [*Orol. oscill.*, P. IV, prop. 4] è stato il primo a far uso di questo principio nel problema del pendolo composto; ne fecero altre applicazioni GIAC. BERNOULLI, DANIELE BERNOULLI [Mém. Ac. d. Sciences de Berlin (1748)] e D'ALEMBERT (*Traité de Dynamique,* Part. II, Ch. IV).

Vedi le note di HELMHOLTZ al libro citato alla nota del § 2; MACH, l. c., pag. 166.

avendosi

$$\Pi(q) = -\int Q\,d\,q$$

(con Q funzione di q) e inoltre

$$2\,T = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2 = \dot{q}^2 F(q),$$

la (8) ci dà subito una equazione differenziale del 1° ordine, che con una quadratura ci farà conoscere q mediante t. Dunque il solo integrale (8) riconduce la determinazione del moto alle quadrature.

Tale proprietà è applicata nelle macchine, nel moto di un corpo pesante intorno ad un asse fisso, nel moto di un punto pesante su di una curva fissa, ecc.

Nel caso di un punto si ha, sempre da (8)

$$m\,v^2 + 2\,\Pi = h\,;$$

le superficie $\Pi =$ cost. diconsi di livello e per le ipotesi fatte su Π si deduce che due superficie di livello non possono mai incontrarsi.

Il punto mobile incontra una stessa superficie di livello colla stessa velocità; nel caso della gravità queste superficie sono piani orizzontali.

Conseguenze analoghe possono dedursi relativamente alle forze di percossa, partendo dalla equazione fondamentale

$$\sum [\mathfrak{J} - P - \Delta(m\dot{P})] | \delta P = 0$$

(Cap. 3°, § 2), limitandoci alla considerazione dei

soli spostamenti invertibili. Supponiamo ad esempio che i vincoli siano persistenti per $t=t_0$; cioè il sistema, dopo la percossa, sia almeno soggetto agli stessi vincoli esistenti al momento della percossa; e quindi tra gl'infiniti sistemi di spostamenti compatibili coi vincoli, ci sia anche quello effettivo, per modo che $\delta P = dP = \dot{P}_{+0}\,dt$, accennando con $\dot{P}_{+0}$ la velocità di un punto dopo la percossa. Supporremo finalmente che per $t=t_0$ si introducano, bruscamente, nel sistema nuovi vincoli; senza supporre che agiscano effettivamente forze di percossa; allora l'equazione precedente ci dà

$$\sum (m\dot{P}_{-0} - m\dot{P}_{+0}) | \dot{P}_{+0} = 0$$

od anche

$$\sum m\dot{P}_{+0} | \dot{P}_{+0} = \sum m\dot{P}_{-0} | \dot{P}_{+0} ;$$

ma

$$(\dot{P}_{+0} - \dot{P}_{-0}) | (\dot{P}_{+0} - \dot{P}_{-0}) = \dot{P}_{+0} | \dot{P}_{+0} + \dot{P}_{-0} | \dot{P}_{-0} - 2\dot{P}_{-0} | \dot{P}_{+0} ,$$

quindi

$$\sum m(\dot{P}_{+0} - \dot{P}_{-0}) | (\dot{P}_{+0} - \dot{P}_{-0}) = \sum m\dot{P}_{-0} | \dot{P}_{-0} - \sum m\dot{P}_{+0} | \dot{P}_{+0} ;$$

concludiamo quindi il teorema di CARNOT:

L'energia cinetica dovuta alle velocità perdute è eguale all'energia cinetica perduta.

§ 5. **Stabilità dell'equilibrio.** — Le considerazioni precedenti permettono di giustificare un teorema enunciato solamente nel Vol. 1°, pag. 226. Siano $q_1, q_2, \ldots q_n$ le coordinate generali di un

sistema a vincoli indipendenti dal tempo; Π l'energia potenziale, dipendente da tutte le q. In una posizione in cui tutte le q sono nulle, Π abbia un valor minimo che potremo sempre supporre eguale a zero, approfittando della costante arbitraria che figura in Π.

Quindi, se ε è scelto ad arbitrio, per ogni q tale che $|q| < \varepsilon$, sarà $\Pi > 0$. La condizione precedente equivale alla

$$q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2 < \varepsilon^2,$$

che può interpetrarsi dicendo che il punto

$$P(q_1, q_2, \ldots q_n)$$

di uno spazio ad n dimensioni è interno alla sfera di raggio ε col centro nella origine. La superficie limite di questo campo sferico è rappresentata dalla

$$q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2 = \varepsilon^2.$$

Diciamo m il più piccolo dei valori che Π assume sulla superficie limite del campo sferico; rimoviamo il sistema infinitamente poco dalla sua posizione di equilibrio imprimendo una piccola velocità ai vari punti. In questa nuova posizione, che potremo assumere come iniziale, le q saranno molto piccole e così pure l'energia cinetica e si potrà sempre fare in modo che

$$T_0 + \Pi_0 < m.$$

Il sistema comincerà a muoversi e sussistendo la (8) sarà pure per tutta la durata del moto

$$T + \Pi < m,$$

e quindi

$$m - \Pi > 0.$$

È dunque impossibile che il punto P raggiunga la superficie limite del campo, chè in tal caso $m - \Pi$ risulterebbe negativo o nullo. Dunque P resta sempre nell'interno (arbitrariamente piccolo) del campo sferico, cioè *la posizione di equilibrio è stabile* *.

È stato dimostrato che la posizione di equilibrio in cui Π è massima, è invece instabile **. Il caso in cui Π non è massima nè minima è assai più difficile e su esso non si hanno che risultati particolari ***.

§ 6. **Impulso di un sistema.** — Consideriamo gl'impulsi $m\dot{P}$ dei vari punti di un sistema; cioè quel sistema d'impulsi che, in modo istantaneo, sarebbe capace di condurre il sistema dalla quiete allo stato di moto all'istante t. Tale sistema d'impulsi si dirà *impulso del sistema all'istante t.* Rispetto

---

* LAGRANGE, *Méc. analy.* Œuvres compl. **11**, pag. 69. La dimostrazione generale e rigorosa è di DIRICHLET, J. v. Crelle, **32**: riprodotta nella *Méc. anal.* pag. 457. Sulla necessità che Π dipenda da tutte le q, vedi APPELL, l. c., **2**, pag. 353.

** LIAPUNOFF, J. de Liouville (5), **3** (1897). HADAMARD, ibidem. KNESER, J. v. Crelle, **115**, p. 308 (1895) e **118**, p. 186 (1897).

*** LIAPUNOFF, ibidem. PAINLEVÉ, Comp. Ren. **125**, pag. 1021 (1897); **138**, (1903) HAMEL, Mathem. Ann. **57**, pagina 541 (1903).

ad una origine fissa O si può sostituire tale sistema con un vettore impulso risultante $\mathfrak{R} - O$ e con una coppia o momento risultante $\mathfrak{M} - O$ *(coordinate dell'impulso)*. Si ha

$$(9) \quad \mathfrak{R}-O=\sum m\dot{P}, \quad \mathfrak{M}-O=\sum m|(P-O)\dot{P}.$$

Se G è il centro di massa del sistema all'istante t, poichè

$$(G-O)\sum m = \sum m(P-O),$$

si deduce

$$(10) \qquad \dot{G}\sum m = \mathfrak{R} - O.$$

Il vettore impulso è eguale all'impulso del centro di massa in cui sia concentrata tutta la massa del sistema.

Nel caso di un sistema di punti liberi, essendo le forze esterne eguali, per ogni punto, alle forze d'inerzia, se $R - O$ ed $M - O$ sono le coordinate del sistema di forze esterne, avremo

$$(11) \quad R-O=\sum m\ddot{P}, \quad M-O=\sum m|(P-O)\ddot{P}.$$

Le stesse equazioni valgono per un sistema rigido libero; basta immaginarlo costituito da un assieme di punti connessi da aste rigide, come si è fatto in Statica (Vol. 1°, pag. 214).

Derivando le (9) abbiamo

$$(12) \quad \frac{d(\mathfrak{R}-O)}{dt}=R-O, \quad \frac{d(\mathfrak{M}-O)}{dt}=M-O.$$

Se quindi $R - O = M - O = 0$, l'impulso risulta costante. Dunque

In un sistema di punti liberi o in un sistema rigido, se le forze esterne sono nulle, l'impulso è costante; in ogni altro caso, la variazione dell'impulso coincide, in ogni istante, col sistema di forze istantanee originate dalle forze esterne.

Abbiamo quindi le due leggi fondamentali dell'impulso (vedi Cap. 1°, § 4).

Vediamo ora se le (12) sussistono per i sistemi olonomi.

Diciamo U_1, V_1, W_1, le coordinate di $\mathfrak{R}-O$; P_1, Q_1, R_1, quelle di $\mathfrak{M}-O$ in un sistema di assi fissi ortogonali coll'origine in O; di guisa che:

$$U_1 = \sum m\dot{x}, \text{ ecc.}; \quad P_1 = \sum m(y\dot{z} - z\dot{y}), \text{ ecc.}$$

Partiamo poi dalle equazioni di LAGRANGE (Cap. 3°, § 1, for. 3)

$$m\ddot{x} = X + \lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial x} + \cdots, \text{ ecc.}$$

Da queste equazioni deduciamo agevolmente:

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{dU_1}{dt} = R_x + \lambda_1 \sum \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x} + \cdots, \text{ ecc.} \\ \dfrac{dP_1}{dt} = M_x + \lambda_1 \sum \left(y \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial z} - z \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial y} \right) + \cdots, \text{ ecc.}; \end{cases}$$

mentre le (12) ci dànno

$$(14) \quad \frac{dU_1}{dt} = R_x, \text{ ecc.}, \quad \frac{dP_1}{dt} = M_x, \text{ ecc.}$$

Poichè la prima delle (13) coincida colla prima

delle (14) è necessario e basta che

$$(15)\quad \lambda_1 \sum \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x} + \cdots + \lambda_r \sum \frac{\partial \mathfrak{F}_r}{\partial x} = 0.$$

Cominciamo a considerare il caso di un solo vincolo; l'equazione precedente, non potendo essere $\lambda_1 = 0$, ci dà

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x} = 0,$$

cioè, sviluppando,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_n} = 0,$$

equazione alle derivate parziali del primo ordine, lineare, omogenea, il cui integrale generale è

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1(x_2 - x_1,\ x_3 - x_1,\ \ldots\ x_n - x_1,\ y,\ z);$$

cioè l'equazione del vincolo potrà contenere le variabili y e z in modo arbitrario e le x solamente per le differenze fra loro due a due. La stessa cosa vale qualunque sia il numero delle equazioni dei vincoli.

Infatti, poniamo

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_1 + \xi_2,\ \ldots,\ x_n = \xi_1 + \xi_n,$$

e sia $\mathfrak{F} = 0$ una qualunque delle equazioni dei vincoli, che colla sostituzione precedente risulterà funzione delle ξ, y e z; considerata a questo modo dicasi $(\mathfrak{F})$. Allora osservando che

$$\frac{\partial (\mathfrak{F})}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_n} = \sum \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x},$$

l'equazione (15) diventa

$$\lambda_1 \frac{\partial(\mathfrak{T}_1)}{\partial \xi_1} + \lambda_2 \frac{\partial(\mathfrak{T}_2)}{\partial \xi_1} + \cdots = 0.$$

Ma possiamo immaginare di aver ricavato ξ_1 da $(\mathfrak{T}_1) = 0$ e di averlo sostituito in tutte le altre, che, in tal modo, non verranno più a contenere ξ_1: allora dovendo risultare

$$\frac{\partial(\mathfrak{T}_1)}{\partial \xi_1} = 0$$

anche $(\mathfrak{T}_1)$ non conterrà ξ_1; ciò che appunto avevamo annunciato. Quando le equazioni dei vincoli contengono le x per differenze, tra gl'infiniti sistemi di spostamenti invertibili è compresa una traslazione del sistema, supposto irrigidito, parallelamente ad x; e reciprocamente, perchè in tal caso

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \cdots = \delta x_n, \ \delta y = \delta z = 0$$

e l'equazione

$$\sum \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \delta z \right) = 0,$$

cui soddisfano gli spostamenti invertibili, diventa appunto

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} = 0.$$

Dunque:

Se in un sistema olonomo, supposto irrigidito, è possibile una traslazione secondo l'asse x, si ha

$$\frac{dU_1}{dt} = R_x$$

e reciprocamente.

Lo stesso dicasi per l'asse y e z.

Perchè la quarta equazione del sistema (13) coincida con la quarta del sistema (14), è necessario e basta che

$$\lambda_1 \sum \left(y \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial z} - z \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial y} \right) + \cdots = 0.$$

Sul piano yz si assuma un sistema di coordinate polari r, θ per modo che

$$z = r \operatorname{sen} \theta, \quad y = r \cos \theta;$$

poichè

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = y\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y},$$

l'equazione precedente diventa

$$\lambda_1 \sum \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \sum \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \theta} + \cdots = 0,$$

analoga alla (15); dunque le equazioni dei vincoli non possono contenere le θ che per le differenze due a due, e le x in modo arbitrario.

Consideriamo due punti qualunque del sistema e le loro proiezioni M_r, M_s sul piano yz; nel triangolo $O M_r M_s$ l'angolo in O è eguale a $\theta_r - \theta_s$; una qualunque sua funzione trigonometrica è esprimibile mediante i lati; cioè mediante

$$\overline{OM}_r^2 = y_r^2 + z_r^2, \quad \overline{M_r M}_s^2 = (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2.$$

Dunque in ogni equazione dei vincoli la x può figurare in un modo qualunque; le y e z solamente in quelle combinazioni o a quelle riducibili. Tale condizione si interpetra così: tra gl'infiniti sistemi di spostamenti virtuali invertibili è compresa una rotazione del sistema, supposto irrigidito, intorno x; e reciprocamente, perchè in tal caso

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -z\delta\theta, \quad \delta z = y\delta\theta,$$

e l'equazione cui soddisfano gli spostamenti invertibili diventa

$$\sum\left(y\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\right) = 0.$$

Dunque:

Se in un sistema olonomo, supposto irrigidito, è possibile una rotazione intorno l'asse x, si ha

$$\frac{dP_1}{dt} = M_x$$

e reciprocamente.

Se lo stesso ha luogo per l'asse y, avremo pure

$$\frac{dQ_1}{dt} = M_y;$$

ma allora è anche possibile una rotazione intorno z e però sarà pure

$$\frac{dR_1}{dt} = M_z.$$

Questi teoremi si estendono agevolmente a qualunque sistema, partendo dalla equazione gene-

rale della Dinamica (Cap. 3°, § 1, for. 2). Se infatti in un sistema, supposto irrigidito, è possibile una traslazione lungo l'asse x, tale equazione si riduce a

$$\sum m\ddot{x} = \sum X$$

cioè alla prima delle (14) *.

§ 7. **Teoremi ed integrali del centro di massa e delle aree.** — La prima delle (12), tenendo presente la (10), equivale a

$$(16) \qquad d(\dot{G}\sum m) = (R - O)dt$$

che è l'equazione del moto del centro di massa; dunque

Il centro di massa di un sistema, che supposto irrigidito può effettuare una traslazione lungo un asse qualunque, si muove come se in esso fossero trasportate tutte le forze parallelamente a loro stesse e concentrata ivi tutta la massa del sistema.

In generale però $R - O$ dipende dalla posizione e dalla velocità dei vari punti del sistema, non esprimibili mediante le coordinate e la velocità di G; chè infatti uno stesso punto può essere centro di massa di infiniti sistemi. Però la (16) esprime una proprietà del centro di massa di un sistema: cioè che il moto di tale centro non varia se, prescindendo dal sistema, si suppone concentrata tutta la sua massa in G e si suppongono

---

* LAGRANGE, l. c., II, pag. 273.

ivi trasportate, parallelamente a loro stesse, tutte le forze; ma non ci permette però di determinare questo movimento.

Tale proprietà dicesi « *teorema della conservazione del moto del centro di massa* ».

Se però $R - O = 0$, ciò che accade se il sistema è soggetto semplicemente ad azioni interne eguali e contrarie alle reazioni e dirette secondo le congiungenti i punti due a due, abbiamo che

L'impulso del centro di massa è costante; oppure *il centro di massa o è in riposo o si muove di moto rettilineo ed uniforme.* Quindi, rispetto agli assi fissi avremo

$$(17) \qquad \begin{cases} \sum m\dot{x} = a, \text{ ecc.} \\ \sum m x = a t + a', \text{ ecc.} \end{cases}$$

Se fosse $a = b = c = 0$ il centro di massa sarebbe fisso. Abbiamo dunque sei integrali delle equazioni del moto cioè gl'*integrali del centro di massa;* essi sono algebrici e lineari rispetto alle coordinate ed alle componenti della velocità.

Se poi il sistema, supposto irrigidito, può effettuare una sola traslazione lungo l'asse x ed inoltre è $R_x = 0$, allora sussisteranno soltanto i due integrali

$$\sum m\dot{x} = a, \qquad \sum m x = a t + a' \;*.$$

---

* NEWTON, l. c., pag. 17. Corollarium IV. D'ALEMBERT, *Traité de Dynamique.* 2ème Partie, Chap. II. LAGRANGE, l. c., pag. 278.

Se in un sistema, supposto irrigidito, è possibile una rotazione intorno x, pel § precedente, si ha

$$\frac{dP_1}{dt} = M_x;$$

e se inoltre $M_x = 0$, avremo $P_1 = \text{cost.}$; cioè

In un sistema, che supposto irrigidito può effettuare una rotazione intorno ad un asse e che ha nulla la componente della coppia risultante delle forze esterne secondo quell'asse, è costante la componente della coppia d'impulso secondo l'asse stesso.

Teorema analogo potrebbe stabilirsi per le forze di percossa.

Diremo ancora che

$$\sum m(y\dot{z} - z\dot{y}) = \text{cost.} \tag{18}$$

è un integrale primo delle equazioni del moto, algebrico e bilineare rispetto alle coordinate e alle componenti della velocità.

Esso riceve una semplice interpetrazione. Considero la proiezione di un punto sul piano yz e la unisco con O; sia r il raggio vettore che descriverà un certo settore A; poichè

$$2\frac{dA}{dt} = y\dot{z} - z\dot{y}$$

l'integrale precedente ci dice che

$$\sum m\dot{A} = \alpha$$

e quindi

$$\sum mA = \alpha t + \alpha'.$$

Perciò l'integrale precedente dicesi delle *aree* *.

Se poi il sistema, supposto irrigidito, può ruotare intorno ad un asse qualunque uscente da O ed inoltre

$$M - O = 0,$$

risulterà

$$\mathfrak{M} - O = \text{cost.},$$

cioè *è costante l'asse della coppia d'impulso per tutta la durata del moto.* In tal caso avremo tre integrali delle aree; il teorema delle aree è vero in un piano qualunque e la costante delle aree è la proiezione della coppia d'impulso sulla normale al piano e quindi per il piano normale all'asse di tale coppia, e che dicesi *piano invariabile,* essa assume il valor massimo **.

Nel moto di un sistema di n punti liberi, soggetti a forze dirette secondo le congiungenti i punti due a due e funzioni delle sole distanze (problema degli n corpi) sussistono dunque: l'integrale della conservazione dell'energia, i sei integrali del moto del centro di massa, e i tre integrali delle aree; cioè in totale *dieci* integrali, che per $n > 2$ non bastano alla determinazione del moto.

---

* NEWTON, l. c., pag. 34. Sectio II. Prop. I; D. BERNOULLI, Mém. Ac. de Berlin (1745); pag. 54. EULER, *Opuscula,* (1746); D'ARCY. Mém. Ac. de Paris (1747), pag. 348.

** LAPLACE, *Traité de Méc. Céleste.* Livre I. N° 21, pag. 65.

Nel caso di un punto libero la condizione $M_x = 0$ si interpetra subito, esprimendo che la forza deve incontrare l'asse x (Cap. 2°, § 1): nel caso di un punto mobile su di una superficie la condizione relativa al vincolo (§ precedente) significa che la superficie deve essere di rotazione, ecc. (Cap. 2°, § 1).

§ 8. **Azione di un sistema.** — Supponiamo che in un sistema olonomo a vincoli qualunque (anche dipendenti dal tempo) le forze ammettano un potenziale U; supposte integrate le equazioni del moto possiamo immaginare costruita la funzione

$$V = \int_{t_0}^{t} (T - U)\, dt. \tag{19}$$

Essa è stata chiamata, da HAMILTON, *azione compiuta dal sistema nel passaggio dalla posizione corrispondente all'istante* t_0 *a quella all'istante* t. Si dice anche che V è l'integrale di HAMILTON *.

L'azione, come il lavoro compiuto dalle forze del sistema, non dipende che dalle posizioni estreme di questo. Immaginiamo infatti che le traiettorie dei punti del sistema varino infinitamente poco, attribuendo ad ogni punto uno spostamento virtuale compatibile coi vincoli; per modo che ad un punto, su di una determinata traiettoria, verrà a corrispondere un punto infinitamente prossimo e le coordi-

* Vedi nota al § 4, Cap. 3°.

nate q avranno variato di δq. L'azione, calcolata per rispetto alle nuove posizioni, avrà pure variato di δV, mentre il tempo del passaggio è restato inalterato. Avremo

$$\delta V = \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} - \frac{\partial U}{\partial q} \delta q \right) dt,$$

e

$$\int_{t_0}^{t} p \, \delta \dot{q} \, . \, dt = (p \, \delta q)_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \dot{p} \, \delta q \, . \, dt ;$$

quindi

$$\delta V = \sum (p \delta q - p_0 \delta q_0) - \int_{t_0}^{t} \sum \left(\dot{p} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} \right) \delta q . dt,$$

e questa, in virtù delle equazioni di LAGRANGE (Cap. 3°, form. 12, 15, 17), si riduce a

$$\delta V = \sum (p \, \delta q - p_0 \, \delta q_0) \tag{20}$$

la quale esprime il *teorema dell'azione variante* *.

Supponiamo ora fisse le posizioni estreme del sistema, cioè fisse quelle corrispondenti a t e t_0; quindi le traiettorie dei vari punti, pur variando infinitamente poco, abbiano però a comune le posizioni estreme. Essendo $\delta q = \delta q_0 = 0$, risulta

$$\delta V = 0$$

cioè *l'azione non ha variato*: ed abbiamo il *teorema dell'azione stazionaria*.

Reciprocamente da questo teorema (nella ipotesi di $\delta q = \delta q_0 = 0$) seguono di necessità le

* HAMILTON, Philos. Trans. (1835), p. 99.

equazioni del moto del sistema nella 2ª forma di LAGRANGE.

Più generalmente ancora, posto

$$(21) \qquad \delta V = \int_{t_0}^{t} [\delta T - \sum Q \delta q] dt,$$

in cui $\sum Q\delta q$ è l'espressione del lavoro virtuale delle forze esterne (non più derivabili da un potenziale), la condizione $\delta V = 0$, deve necessariamente condurre alle equazioni del moto. L'osservazione precedente dà quindi un altro mezzo per stabilire queste equazioni (PRINCIPIO DI HAMILTON) *.

Come s'è detto, la costruzione di V esige la risoluzione del problema del moto; la ricerca cioè delle q mediante il tempo e i valori iniziali q_0 e $\dot{q}_0$; quindi V sarà funzione di q_0, $\dot{q}_0$, t. Ma se è possibile ricavare le $\dot{q}_0$ mediante t, q, q_0, potremo anche esprimere V mediante t, q, q_0: allora, t restando costante,

$$\delta V = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q} \delta q + \frac{\partial V}{\partial q_0} \delta q_0 \right)$$

e dal confronto con (20), si ricava

$$(22) \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial V}{\partial q_0} = -p_0;$$

Le componenti dell'impulso sono le derivate dell'azione rispetto alle coordinate.

---

* Mem. citata.

Sicchè l'azione, per rispetto all'impulso, si comporta come l'energia rispetto alle forze.

Le (22) sono $2n$ relazioni tra p, q e $2n$ costanti (valori iniziali); sono dunque gl'integrali delle equazioni del moto; i quali però dipendono dalla ricerca di V. Vediamo se tale ricerca può farsi indipendentemente dalla integrazione delle equazioni del moto.

§ 9. **Proprietà fondamentale dell'azione. Teorema di Jacobi.** — La derivata totale di V rispetto al tempo è

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q} \dot{q} = T - U,$$

in virtù della (19). Cioè, per le (22),

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p \dot{q} - T + U = 0,$$

e questa (Cap. 3°, form. 19 e 21) si trasforma in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0. \tag{23}$$

La funzione H, composta di Θ ed U, è una funzione delle p e q; e poichè Θ contiene le p a secondo grado, sostituendo al posto delle p i loro valori $\frac{\partial V}{\partial q}$, otteniamo

L'azione soddisfa ad una equazione alle derivate parziali del primo ordine e di secondo grado.

È notevole osservare che essendo Θ di forma nota, la (23) può essere facilmente formata.

L'importanza di questo risultato scaturisce dal seguente teorema fondamentale di JACOBI *.

Sia $V(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ *un integrale completo della* (23); *cioè contenente n costanti arbitrarie nessuna delle quali additiva; allora*

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \end{array}\right.$$

dove le β *sono altre n costanti arbitrarie, sono gl'integrali delle equazioni del moto.*

Ci limiteremo a fare una rapida verificazione del teorema, provando che inversamente dal sistema (24) degli integrali si deducono le equazioni del moto. Facendo infatti variare le q e le α rispettivamente di δq e $\delta \alpha$, avremo

$$\delta V = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q} \delta q + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \delta \alpha \right) = \sum (p \, \delta q + \beta \, \delta \alpha).$$

Derivando rispetto al tempo,

$$\frac{d \delta V}{dt} = \sum (\dot{p} \, \delta q + p \, \delta \dot{q}).$$

Ora

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p \dot{q} = -H + \sum p \dot{q},$$

sempre per la (23). Differenziando colla caratteri-

---

* JACOBI, *Vorles. ü. Dynamik*, pag. 157, 20[te] Vorles. Berlin, 1884.

stica δ, si ha

$$\delta\frac{dV}{dt} = -\sum\left(\frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right) + \sum(p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p);$$

e poichè

$$\delta\frac{dV}{dt} = \frac{d\delta V}{dt},$$

risulta

$$\sum\left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\right] = 0,$$

e potèndo assumere ad arbitrio δp e δq (Cap. 3°, § 4) avremo

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q};$$

cioè appunto le equazioni del moto sotto la forma canonica *.

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, pel teorema della conservazione dell'energia si ha

$$H = T + U = h,$$

H essendo l'energia totale; allora ponendo

$$(25) \qquad V = -ht + W(q_1, q_2, \dots)$$

l'equazione (23) si trasforma semplicemente nella

$$(26) \quad H\left(q_1, q_2, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots\right) = h$$

che contiene le sole derivate della funzione W

* Cfr., per più ampi svolgimenti, le citate Vorl. di Jacobi; Appell, l. c., **2**, pag. 401; Maggi, l. c., pag. 218 e seguenti.

rispetto alle coordinate. La W dicesi *funzione caratteristica.*

Determinato un integrale completo della (26) cioè un integrale contenente le costanti

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1},$$

gli integrali ultimi del problema di meccanica sono

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}.$$

§ 10. **Teorema della minima azione, e del minimo sforzo.** — Ci limiteremo ad enunciarli; essi valgono intanto nell'ipotesi che sussista l'integrale della conservazione dell'energia, cioè che

$$T + U = h.$$

Si consideri

$$\int_{t_0}^{t} T\,dt = \frac{1}{2} \sum \int m v\, ds;$$

e si suppongano dati per t e t_0 i valori delle coordinate q ed inoltre per $t = t_0$ il valore di T. Le funzioni q di t, che rappresentano gli integrali del moto, rendono minimo il precedente integrale, o, più precisamente, la sua variazione, per uno spostamento virtuale compatibile coi vincoli, riesce nulla. In ciò consiste il cosidetto *teorema della minima azione.*

Nelle stesse condizioni, la

$$\sum \{m[\ddot{x} - X)^2 + (\ddot{y} - Y)^2 + (\ddot{z} - Z)^2]\}$$

riesce un minimo pel movimento effettivo. E questo è il teorema del minimo sforzo di GAUSS *.

Esercizi.

1. Sotto quali condizioni sussistono l'integrale della conservazione dell'energia e uno degli integrali del centro di massa?

Le condizioni relative ai vincoli sono già note; le forze ammettono un potenziale U e se l'integrale del centro di massa è quello dell'asse x, allora

$$R_x = -\sum \frac{\partial U}{\partial x} = 0;$$

quindi la U deve contenere le x per differenze, ecc.

2. Sotto quali condizioni sussistono l'integrale della conservazione dell'energia e uno delle aree?

Le condizioni relative ai vincoli sono note. Dovendo poi essere

---

* Il teorema della minima azione è dovuto a MAUPERTUIS che lo diè senza una vera dimostrazione, ma si contentò di verificarlo in alcuni casi. Mém. de l'Ac. de Berlin (1746).

Su questo principio vedi JACOBI, *Vorl. ü. Dynamik*, pag. 43; MACH, l. c., pag. 346 e 348; e per più ampie notizie storiche: HELMHOLTZ, Ges. Abh. **3**, *Zur Geschichte d. Prin. der Kleinsten Action.* e MAYER, *Storia del princ. della minima azione*, in Bull. Bibliog. di Boncompagni **II**, pp. 155-166 (1878). Vedi pure MAGGI, l. c., pag. 181. Sul principio di GAUSS vedi: Gauss. Ges. Werke, **5**, pag. 26 (1829); MAGGI, l. c., pag. 205.

$$M_x = -\sum\left(y\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0,$$

la U deve contenere le y e z nelle combinazioni del § 6. Si deduce di qui subito che se sussiste anche l'integrale delle aree secondo y, sussisterà anche quello rispetto asse z.

3. Trattare col metodo di JACOBI il problema del moto di un punto attratto da un centro fisso con una forza funzione della sola distanza.

Il centro di attrazione sia nell'origine e la posizione del mobile sia fissata dal raggio vettore q_1, dalla colatitudine q_2 e dalla longitudine q_3. Si ha

$$2\,T_{\dot q} = m(\dot q_1^2 + q_1^2\dot q_2^2 + q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 \cdot \dot q_3^2),$$

e poichè

$$p_1 = m\dot q_1, \quad p_2 = m q_1^2 \dot q_2, \quad p_3 = m q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 \cdot \dot q_3,$$

risulta

$$2\,T_p = \frac{1}{m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + \frac{p_3^2}{q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2}\right).$$

Se la forza attrattiva è $f(q_1)$, l'energia potenziale è

$$U(q_1) = -\int f(q_1)\,dq_1;$$

l'energia totale è

$$H = T_p + U = h,$$

e l'equazione (26) diventa

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{q_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 = 2m[h - U(q_1)].$$

In questa la q_3 non figura esplicitamente e si cerca di soddisfarla ponendo

$$W = W_1 + W_2 + a_2 q_3$$

in cui a_2 è costante, W_1 funzione della sola q_1 e W_2 della sola q_2. L'equazione si spezza in queste altre due

$$\left(\frac{d\,W_1}{d\,q_1}\right)^2 = 2\,m(h - U) - \frac{a_1^2}{q_1^2}, \qquad \left(\frac{d\,W_2}{d\,q_2}\right)^2 + \frac{a_2^2}{\operatorname{sen}^2 q_2} = a_1^2$$

essendo a_1 una nuova costante: con due quadrature si determinano W_1 e W_2 e quindi W, ecc.

[JACOBI, l. c., pag. 183].

4. Lo stesso pel moto di un punto su di una superficie levigata e fissa.

Riferiti i punti della superficie ad un sistema di coordinate curvilinee q_1, q_2 e posto l'elemento lineare sotto la forma

$$ds^2 = \mathfrak{E}\, dq_1^2 + 2\mathfrak{F}\, dq_1\, dq_2 + \mathfrak{G}\, dq_2^2,$$

risulta:

$$2T_{\dot q} = \mathfrak{E}\dot q_1^2 + 2\mathfrak{F}\dot q_1 \dot q_2 + \mathfrak{G}\dot q_2^2, \quad (m = 1)$$

$$p_1 = \mathfrak{E}\dot q_1 + \mathfrak{F}\dot q_2, \quad p_2 = \mathfrak{F}\dot q_1 + \mathfrak{G}\dot q_2;$$

e quindi nella ipotesi che esista l'integrale della conservazione della energia, l'equazione (26) diventa

$$\mathfrak{G}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2$$

$$= 2(h - U)(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2).$$

Se le coordinate sono ortogonali ($\mathfrak{F} = 0$) ed isoterme

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{G} = \lambda(q_1, q_2),$$

e il punto non è soggetto a forze (moto geodetico) si ha

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 = 2h\lambda.$$

Nel caso delle superficie di LIOUVILLE, in cui

$$\lambda = \lambda_1(q_1) + \lambda_2(q_2)$$

posto

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2)$$

si deduce subito W e quindi gl'integrali del moto sono

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \int \frac{dq_1}{\sqrt{2h\lambda_1 + a_1}} - \int \frac{dq_2}{\sqrt{2h\lambda_2 - a_1}} = b_1,$$

a_1 e b_1 essendo costanti arbitrarie. L'ultima è l'equazione delle geodetiche, ridotta quindi alle quadrature.

Le quadriche appartengono alle superficie di LIOUVILLE.

[JACOBI, l. c., pag. 198 e 212].

5. Moto di un punto su di una superficie di rotazione supposto il potenziale funzione del raggio del parallelo.

Se q_1 è il raggio del parallelo, q_2 la longitudine, e l'asse z è l'asse di rotazione, essendo $z = f(q_1)$ e

$$ds^2 = [1 + f'(q_1)^2] dq_1^2 + q_1^2 dq_2^2,$$

l'equazione da integrare (esercizio precedente) è

$$q_1^2 \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + [1 + f'(q_1)^2] \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2$$
$$= 2 q_1^2 [1 + f'(q_1)^2] [h - U(q_1)]$$

donde

$$W = a_1 q_2 + \int \frac{dq_1}{q_1} \sqrt{[1 + f'(q_1)^2][U(q_1) - h - a_1^2]}$$

a_1 essendo una costante arbitraria; ecc.

6. Trasformare la (26) nel caso delle coordinate ellittiche in un piano.

Nel caso di un moto piano la posizione di un punto sia fissata mediante le sue distanze r ed r_1 a due punti fissi F ed F_1 distanti di $2a$. Queste coordinate non essendo ortogonali riferiamo la posizione di P ad un sistema di coordinate ellittiche u e v ponendo

$$r + r_1 = 2u, \quad r - r_1 = 2v.$$

Avendosi

$$\text{sen}^2 (r r_1) ds^2 = dr^2 + dr_1^2 - 2 \cos (r r_1) dr\, dr_1,$$

$$\cos (r r_1) = \frac{r^2 + r_1^2 - 4a^2}{2 r r_1},$$

risulta agevolmente

$$2T = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2} \dot{u}^2 - \frac{u^2 - v^2}{v^2 - a^2} \dot{v}^2;$$

però l'equazione da integrare è

$$(u^2 - a^2) \left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 - (v^2 - a^2) \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2$$
$$+ 4(u^2 - v^2)(U - h) = 0.$$

L'integrazione di questa equazione si riduce alle quadrature se

$$U = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{u^2 - v^2}.$$

In questo caso rientra evidentemente quello del moto geodetico; dell'attrazione diretta ad F e inversamente proporzionale al quadrato della distanza, poichè si ha

$$U = \frac{k^2}{r} = \frac{k^2}{u + v} = \frac{k^2 u - k^2 v}{u^2 - v^2};$$

e il caso che i due punti F ed F_1 esercitino un'attrazione inversamente proporzionale al quadrato della distanza mentre il punto di mezzo O tra F ed F_1 esercita un'attrazione proporzionale alla distanza (Problema di LAGRANGE). In quest'ultimo caso infatti

$$U = \frac{k^2}{r} + \frac{k_1^2}{r_1} + \alpha\rho^2$$

se ρ è la distanza di O dal punto mobile; e basta osservare che

$$\frac{k^2}{r} + \frac{k_1^2}{r_1} = \frac{k^2(u - v) + k_1^2(u + v)}{u^2 - v^2}; \quad \rho^2 + a^2 = u^2 + v^2$$

e quindi

$$\rho^2 = \frac{u^4 - v^4 - a^2(u^2 - v^2)}{u^2 - v^2}.$$

Per $\alpha = 0$, si ha un celebre problema di EULER [Mém. Ac. Berlin (1760)]. Questo problema e quello più generale di LAGRANGE hanno una ricca bibliografia, che insieme alla storia del problema si può confr. in SERRET, J. de Liouville, **13** (1848), pp. 17-37 e MORERA, Giorn. di Battaglini, **18**, p. 34 (1880).

7. Il moto di un sistema con due gradi di libertà può sempre ridursi ad un problema di moto in un piano.

La superficie sia riferita ad un sistema di coordinate

isoterme x, y; quindi

$$2T = \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

(λ funzione di x, y). Le equazioni del moto sono (dicendo t_1 il tempo)

$$\frac{d(\lambda \dot{x})}{dt_1} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}; \text{ ecc.}$$

inoltre

$$\frac{1}{2}\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = h - U.$$

Posto

$$dt_1 = \lambda\, dt$$

otteniamo facilmente

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(U - h)], \text{ ecc.}$$

che sono le equazioni del moto di un punto in un piano, la funzione potenziale essendo $\lambda(U - h)$.

Se in particolare $\lambda(U - h) = \varphi(x) - \psi(y)$, avremo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi'(x), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \psi'(y),$$

donde

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\varphi(x) + A, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \psi(y) + B;$$

ma, per l'integrale della conservazione energia, $A + B = 0$. Il problema è ridotto alle quadrature. L'equazione della traiettoria è

$$\frac{dx}{\sqrt{A - \varphi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - A}}.$$

Se la condizione imposta vale qualunque sia h e quindi per $h = 0$, $h = 1$ deve essere $\lambda = \alpha(x) - \beta(y)$: l'elemento lineare è della forma

$$[\alpha(x) - \beta(y)]\,[dx^2 + dy^2].$$

L'elemento suddetto si riduce a questa forma: nel caso delle coordinate cartesiane: nel caso delle coordinate polari in cui posto $x = \log r$, $y = \theta$, assume la forma $e^{2x}(dx^2 + dy^2)$

e la funzione delle forze deve essere $\varphi(x) - e^{-2x}\psi(y)$; nel caso delle coordinate ellittiche o paraboliche; e in questi solamente.

[LIOUVILLE, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouv. d'un point peuvent s'intégrer.* J. de Liouville, **11** (1846); **12**, (1847)].

8. Problema di EULER nello spazio.

È il problema del n° 6, ma nell'ipotesi che il moto non avvenga più nel piano per FF_1. In un piano passante per FF_1 assumo un sistema di coordinate ellittiche u, v; sia inoltre w l'angolo che il piano per FF_1 e pel punto mobile, forma con un piano fisso. La parte di $2T$ relativa ad u, v è come quella dell'esercizio 6; quella relativa a w è $\delta^2 \dot{w}^2$, δ essendo la distanza di P dalla retta FF_1. Si ha subito

$$\delta^2 = u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{a^2} - a^2 = \frac{1}{a^2}(v^2 - a^2)(a^2 - u^2).$$

L'equazione da integrare è

$$\frac{u^2 - a^2}{u^2 - v^2}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 - \frac{v^2 - a^2}{u^2 - v^2}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - \frac{a^2}{(u^2 - a^2)(v^2 - a^2)}\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 + 4(U - h) = 0,$$

in cui w non comparisce esplicitamente. Basta dunque porre

$$W = \gamma w + W_1 \qquad (\gamma \text{ costante})$$

e W_1 funzione di u e v solamente, e pòi osservare che

$$\frac{1}{(u^2 - v^2)(v^2 - a^2)} = \frac{1}{u^2 - v^2}\left[\frac{1}{v^2 - a^2} - \frac{1}{u^2 - a^2}\right].$$

9. Trattare col metodo di JACOBI l'esercizio 18 (Cap. 2°).

Abbiamo un caso di vincolo dipendente dal tempo

$$2T = \dot{r}^2 + r^2\omega^2 + \dot{z}^2;$$

posto $q_1 = r$, $q_2 = z$, $U = gz$, si ha

$$\Theta = \sum p\dot{q} - T = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 - r^2\omega^2)$$

e l'equazione da integrare è

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 - r^2 w^2\right] + g z = 0.$$

S'integra ponendo

$$V = -ht + W_1(r) + W_2(z);$$

e si ottengono gl'integrali

$$\int \frac{dr}{\sqrt{a_1 + r^2 \omega^2}} - \int \frac{dz}{\sqrt{2h - a_1 - 2gz}} = b_1,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2h - a_1 - 2gz}} = t - t_0; \text{ ecc.}$$

10. Se l'energia cinetica è della forma

$$2T = (A_1 + A_2 + A_3)(B_1 \dot{q}_1^2 + B_2 \dot{q}_2^2 + B_3 \dot{q}_3^2)$$

essendo le A_i, B_i funzioni di q_i rispettivamente, e le forze derivano da un potenziale della forma

$$U = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

con U_i funzione di q_i; il problema è riducibile alle quadrature.

Supposti i vincoli indipendenti da t, si deve integrare la

$$\frac{1}{2B_1}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + U_1 + \dots = h(A_1 + A_2 + A_3).$$

Basta porre

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + W_3(q_3).$$

In questo caso rientrano le coordinate ellittiche dello spazio.

11. Trattare, coi principî esposti, il problema 4 (Cap. 3°).

Terremo le stesse notazioni. Ha luogo integrale conservazione energia: onde $T = h$, cioè

$$m\dot{x}^2 + m'(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta) = h;$$

ha luogo integrale centro di massa secondo x; onde

$$m x + m'(x - a \cos \theta) = a t + a$$

od anche,

$$(m + m') \dot{x} + m' a \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = a;$$

eliminando x si ottiene la stessa equazione già trovata.

12. Stesso problema supponendo il moto in un piano verticale.

L'energia potenziale è $U = m a g \operatorname{sen} \theta$; nel resto si segue stesso metodo. Se $a = 0$, centro di massa descrive una verticale e quindi m' una ellissi.

CAPITOLO QUINTO.

DINAMICA DEI SISTEMI RIGIDI.

---

§ 1. **Momento d'inerzia rispetto ad un asse.** — Dicesi momento d'inerzia di un sistema rigido rispetto ad un asse la somma dei prodotti delle masse dei vari punti del sistema, per i quadrati delle distanze dei punti stessi dall'asse *. In generale supposto il sistema non piano o non lineare, detto $\mathfrak{J}$ tale momento avremo

$$(1) \qquad \mathfrak{J} = \sum m r^2 > 0,$$

e le dimensioni saranno $[m, l^2]$; nei sistemi continui $\mathfrak{J}$ è espresso da un integrale.

L'asse esca dall'origine O di una terna ortogonale ed abbia α, β, γ per coseni direttori. Se

---

* Questa teoria, cominciata da HUYGHENS (*Orol. oscill.*), è stata sviluppata da EULER [Mém. Ac. de Berlin (1758), pag. 131-153; *Theoria motus corporum solidorum*, Cap. V, pag. 166 (1765)]. Anche ad EULER è dovuto il nome di *centro di massa* o *d'inerzia*.

$P(x, y, z)$ è un punto del sistema, la proiezione di $P - O$ sull'asse è $\alpha x + \beta y + \gamma z$: onde

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

cioè

$$r^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \cdots - 2\beta\gamma y z - \cdots.$$

Se quindi poniamo

$$(2)\quad \begin{cases} A = \sum m(y^2 + z^2), \quad B = \sum m(z^2 + x^2), \\ \qquad C = \sum m(x^2 + y^2), \\ A' = \sum m y z, \qquad B' = \sum m z x, \\ \qquad C' = \sum m x y, \end{cases}$$

risulta

$$(3)\quad \mathfrak{J} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta.$$

Se notiamo poi che $y^2 + z^2$ è il quadrato della distanza di P dall'asse x, si vede subito che A, B, C *rappresentano i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi.*

Le A', B', C', che non hanno una interpetrazione così semplice, diconsi *prodotti d'inerzia del sistema*. Le A, B, C sono quantità essenzialmente positive; inoltre

$$B + C - A = 2\sum m x^2 > 0;$$

però A, B, C *sono tre grandezze positive, ognuna delle quali è minore della somma delle altre due;* poichè

$$A + B + C = 2\sum m(P - O)^2,$$

tale somma è indipendente dagli assi.

Le $A, \ldots A', \ldots$ poi dipendono dalla distribuzione delle masse e dalla configurazione del sistema: quindi

Il momento d'inerzia d'un sistema rispetto ad un asse (uscente dall'origine) è una funzione quadratica omogenea, definita e positiva dei coseni direttori dell'asse.

Una notevole rappresentazione dei vari momenti d'inerzia delle rette uscenti da O, si ottiene riportando su ogni asse, a partire da O, un segmento (reale e finito) eguale ad $\mathfrak{J}^{-\frac{1}{2}}$.

Sia $P(x, y, z)$ la sua estremità; la quale, col variare del raggio, descriverà una superficie chiusa col centro in O.

Poichè

$$\alpha = x\mathfrak{J}^{\frac{1}{2}}, \text{ ecc.},$$

l'equazione di questa superficie è

$$(4) \quad Ax^2+By^2+Cz^2-2A'yz-2B'zx-2C'xy=1,$$

cioè un ellissoide che dicesi *ellissoide d'inerzia* relativo ad O *.

I momenti d'inerzia del sistema rispetto a rette uscenti da O sono le inverse dei quadrati dei semiassi di tale ellissoide; i cui assi diconsi *assi prin-*

---

* CAUCHY, *Anc. Exercices* (1827), Œuvr. compl., **7** (2), pag. 124.

cipali d'inerzia relativi ad O; ad essi corrispondono i *momenti principali d'inerzia.*

Riferendo la posizione del sistema rigido agli assi di tale ellissoide 𝔈, da (4) debbono scomparire i termini coi prodotti delle coordinate, cioè debbono essere nulli A', B', C'. Dunque:

Per ogni punto di un sistema rigido esistono tre direzioni ortogonali e reali tali che

$$\sum myz = \sum mzx = \sum mxy = 0.$$

Se l'ellissoide è di rotazione queste direzioni sono in numero infinito; se è una sfera, ogni raggio è asse principale per quel punto.

Scegliendo per asse z un asse principale relativo ad O, e lasciando indeterminati gli assi y e z, avremo solamente

$$\sum myz = \sum mzx = 0.$$

L'asse z non è, in generale, asse principale per un punto diverso da O. Se infatti fosse ancora asse principale per un altro punto O', essendo $OO' = h$; trasportando gli assi xy parallelamente a loro stessi in O', dovrebbe essere

$$\sum m(z-h)y = \sum mzy - h\sum my = 0,$$

dunque

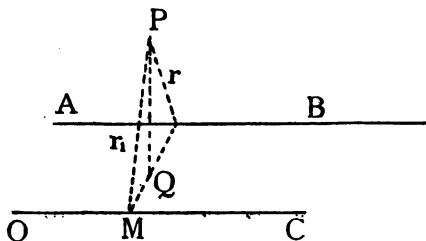
$$\sum my = 0 \qquad \text{e così} \qquad \sum mx = 0;$$

il centro di massa deve essere sull'asse z; dunque

Gli assi principali sono relativi ad un solo punto;

quelli del centro di massa (centrali) sono assi principali per ogni loro punto.

Notiamo da ultimo che basterà limitarci a calcolare i momenti rispetto a rette uscenti dal centro di massa.

Infatti (Fig. 8) sia AB un asse qualunque:

(Fig. 8)

OC la parallela ad AB condotta dal centro di massa O; r ed r_1 le distanze di un punto P del sistema dai due assi (la cui distanza è δ) e PQ la normale al piano dei due assi. Si ha

$$r^2 = r_1^2 + \delta^2 - 2\delta \, . \, QM.$$

Se assumo OC per asse x, il piano $OABC$ per piano xy, si ha

$$QM = y, \qquad \sum m y = 0$$

onde

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \delta^2 \sum m,$$

dove $\mathfrak{J}_1$ è il momento d'inerzia rispetto OC. Per interpetrare questa relazione facilmente, diciamo *raggio d'inerzia* di un sistema rispetto ad un asse, *la distanza a cui si deve collocare una massa eguale*

a quella del sistema perchè abbia lo stesso momento d'inerzia.

Detti k e k_1 i raggi d'inerzia rispetto ad AB e OC, si ha

$$\mathfrak{J} = k^2 \sum m, \qquad \mathfrak{J}_1 = k_1^2 \sum m;$$

la relazione precedente diventa:

$$k^2 = k_1^2 + \delta^2. \tag{5}$$

Se poi x, y sono due assi per O paralleli ad altri due x_1, y_1, uscenti da (ξ, η), si proverebbe subito che

$$\sum m x_1 y_1 = \sum m x y + \xi \eta \sum m.$$

§ 2. **Energia cinetica e coordinate dell'impulso.** — Riferiamo il sistema ad una terna coll'origine nel centro di massa e rigidamente connessa col sistema.

Pel calcolo dell'energia cinetica ci varremo della proprietà dimostrata al § 3, Cap. 4°. Se u, v, w sono le componenti della velocità del centro di massa G, l'energia cinetica di G, supposta in esso concentrata tutta la massa, è

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \sum m.$$

L'energia cinetica nel moto relativo del sistema intorno a G si può calcolare osservando anzitutto che tale movimento si riduce ad una rotazione istantanea intorno ad un asse (α, β, γ) uscente da G; e la grandezza della velocità di un punto P è data dal prodotto di r per la velocità angolare ω;

dunque questa parte dell'energia è espressa da

$$\frac{1}{2}\sum m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \mathfrak{J}$$

$$= \frac{1}{2}(A\alpha^2\omega^2 + \cdots - 2A'\omega^2\beta\gamma - \cdots),$$

in virtù della (3). Se, come al solito, diciamo p, q, r le componenti di Ω, secondo gli assi connessi col sistema, avremo in totale

$$(6)\left\{\begin{aligned} &2T = (u^2+v^2+w^2)\sum m \\ &+Ap^2+Bq^2+Cr^2-2A'qr-2B'rp-2C'pq; \end{aligned}\right.$$

in cui u, v, ... r sono le coordinate del moto istantaneo elicoidale del sistema:

In un sistema rigido l'energia cinetica è una funzione quadratica omogenea, definita e positiva delle coordinate del moto istantaneo elicoidale.

Si può giungere alla stessa conclusione, senza nemmeno fare ipotesi speciali sulla scelta dell'origine e degli assi, partendo dalle formule che dànno le componenti della velocità di strascinamento di un punto del sistema (Vol. 1°, pag. 91) ed osservando che

$$2T = \sum m[(u + qz - ry)^2 + (v + rx - pz)^2 + (w + py - qx)^2].$$

È sempre opportuno riferirsi ad una terna rigidamente connessa col sistema; perchè in tal caso A, B, ... cioè i coefficienti di $2T$, non dipendono dal tempo.

Se il sistema ha un punto fisso, origine, si ha

$$(7)\quad 2T = Ap^2+Bq^2+Cr^2-2A'qr-2B'rp-2C'pq;$$

e se gli assi coordinati sono assi principali d'inerzia relativi al punto fisso, si ha

$$(8) \qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 .$$

Passiamo alle coordinate dell'impulso che, per simmetria di scrittura, accenneremo con U, V, W, P, Q, R.

Siccome (Cap. 4°, § 6),

$$(9) \quad \begin{cases} U = \sum m(u + qz - ry) = u\sum m, \text{ ecc.} \\ P = \sum m[(w + py - qx)y - (v + rx - pz)z] \\ \qquad = Ap - C'q - B'r, \text{ ecc.} \end{cases}$$

risulta:

$$(10) \qquad U = \frac{\partial T}{\partial u}, \ldots, P = \frac{\partial T}{\partial p}, \ldots;$$

Le coordinate dell'impulso sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle coordinate del moto istantaneo.

Risolvendo le (9) rispetto $u, v, \ldots r$, ciò che è sempre possibile, e sostituendo in (6) otteniamo:

L'energia cinetica è una funzione quadratica ed omogenea delle coordinate dell'impulso.

Pel teorema di Euler abbiamo

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + \cdots + p\frac{\partial T}{\partial p} + \cdots$$

e, per le (10),

$$(11) \qquad 2T = uU + \cdots + pP + \cdots;$$

L'energia cinetica è una funzione bilineare delle coordinate del moto istantaneo e dell'impulso.

Differenziamo totalmente la (11):

$$2\,dT = \sum (u\,dU + U\,du + p\,dP + P\,dp);$$

ma riguardando T funzione delle $u, v, \ldots r$, si ha pure

$$dT = \sum\left(\frac{\partial T}{\partial u}du + \frac{\partial T}{\partial p}dp\right) = \sum (U\,du + P\,dp)$$

e quindi, per sottrazione,

$$dT = \sum (u\,dU + p\,dP);$$

donde

$$u = \frac{\partial T}{\partial U}, \ldots, p = \frac{\partial T}{\partial P}, \ldots;$$

Le coordinate del moto istantaneo sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti dell'impulso *.

Consideriamo il caso particolare che il sistema abbia un punto fisso (origine). La (11) ci dà

$$2\,T = Pp + Qq + Rr = \Omega | (\mathfrak{M} - O);$$

in tal caso

L'energia cinetica è il semiprodotto scalare della coppia d'impulso e del vettore (applicato nell'origine) della velocità istantanea di rotazione.

Per l'estremo di Ω (polo di rotazione) conduciamo un ellissoide simile e similmente posto a quello d'inerzia relativo ad O; la sua equazione sarà

$$Ax^2 + By^2 + \cdots - 2A'yz - \cdots = \text{cost.}$$

* KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., pag. 93 e seg.

Nel polo (p, q, r) la normale ha coseni direttori proporzionali a $\frac{\partial T}{\partial p}$, ...; cioè a P, Q, R; quindi

Il piano della coppia d'impulso è coniugato dell'asse istantaneo di rotazione rispetto all'ellissoide di inerzia ; oppure *l'asse della coppia d'impulso è perpendicolare al piano tangente, condotto pel polo di rotazione, all'ellissoide simile e similmente posto a quello d'inerzia relativo al punto fisso* *.

§ 3. **Moto di un corpo rigido intorno ad un asse fisso.** — Il corpo, soggetto a forze qualunque, sia fissato per due suoi punti O, O'; l'asse OO' (asse z) è quindi fisso nel corpo e nello spazio.

La variazione del momento della coppia d'impulso secondo l'asse fisso, è eguale al momento delle forze esterne secondo lo stesso asse (vedi Cap. 4°, § 6), perchè le reazioni dei punti fissi hanno momento nullo secondo l'asse: quindi abbiamo

$$\frac{dR}{dt} = M_z.$$

Sia ω la velocità istantanea di rotazione del sistema (ed eguale a $\dot{\varphi}$, se φ è l'angolo che un piano meridiano forma con un piano fisso); $\mathfrak{J}$ il

* POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation d'un corps,* etc. [J. de Liouville, **17** (1851)].

momento d'inerzia del corpo rispetto l'asse; si ha

$$2T = \mathfrak{J}\omega^2; \qquad R = \frac{\partial T}{\partial \omega} = \mathfrak{J}\omega = \mathfrak{J}\dot{\varphi}.$$

È da notare che la somma dei prodotti delle aree descritte dai punti del sistema per le rispettive masse è

$$\sum m \,.\, \tfrac{1}{2} r \,.\, r\omega = \tfrac{1}{2}\omega \sum m r^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}\omega.$$

Inoltre M_z dipende dalla posizione dei vari punti del sistema, e quindi da φ; dalla loro velocità, e quindi da $\dot{\varphi}$; e dal tempo. Dunque possiamo dire che

$$(12) \qquad \mathfrak{J}\,\ddot{\varphi} = M_z(\varphi, \dot{\varphi}, t),$$

è l'equazione differenziale del moto; la quale, col concorso delle condizioni iniziali, determinerà φ in funzione del tempo e quindi il moto (equazione pura). La determinazione del moto dipende dalla integrazione di una equazione differenziale del secondo ordine, di forma conosciuta ed analoga alla (7) del Cap. 1°. Si integra con quadrature quando M_z dipende solamente da φ, o da $\dot{\varphi}$, o da t.

Le altre equazioni dell'impulso ci faranno conoscere le reazioni; posto $OO' = h$ e dette X, Y, Z; X', Y', Z' le componenti delle reazioni, osserviamo che

$$\dot{x} = -\omega y, \qquad \dot{y} = \omega x, \qquad \dot{z} = 0.$$

Quindi

$$U = \sum m\dot{x} = -\omega \cdot \sum m y;$$

$$\frac{dU}{dt} = -\omega \sum m\dot{y} - \dot{\omega} \sum my$$

$$= -\omega^2 \sum mx - \dot{\omega} \sum my = -(\omega^2 \xi + \dot{\omega}\eta) \sum m,$$

se ξ, η sono le coordinate del centro di massa. Però per la prima equazione (12) del Cap. 4°, otteniamo

$$(13) \quad \begin{cases} R_x + X + X' + (\omega^2 \xi + \dot{\omega}\eta) \sum m = 0 \\ R_y + Y + Y' + (\omega^2 \eta - \dot{\omega}\xi) \sum m = 0 \\ R_z + Z + Z' = 0. \end{cases}$$

Quanto ai momenti si ha

$$\dot{P} = M_x - hY';$$

e poichè $P = -B'\omega$ (§ 2), cioè $P = -\omega \sum mzx$, così otteniamo

$$(14) \quad \begin{cases} M_x - hY' - A'\omega^2 + B'\dot{\omega} = 0 \\ M_y + hX' + B'\omega^2 + A'\dot{\omega} = 0. \end{cases}$$

Queste equazioni (13) e (14) ci permettono di determinare X, X', Y, Y' e $Z + Z'$.

Se le forze esterne ammettono un potenziale ed è Π l'energia potenziale (dipendente solamente da φ) l'integrale della conservazione della energia, cioè

$$(15) \qquad \mathfrak{J}\dot{\varphi}^2 + 2\Pi(\varphi) = h,$$

ci farà risolvere il problema del moto con una sola quadratura.

§ 4. **Moto per inerzia; pendolo composto.** — Consideriamo due casi speciali.

a) il corpo non sia soggetto a forze; l'integrale

della conservazione di energia esprime subito che l'energia cinetica è costante e quindi $\dot{\varphi} = \omega = \text{cost.}$; il corpo ruoterà uniformemente intorno l'asse.

Il polo di rotazione è dunque un punto fisso dell'asse e l'ellissoide $\mathfrak{E}$ condotto per tal punto, simile e similmente situato rispetto all'ellissoide d'inerzia relativo ad O, ruoterà uniformemente intorno l'asse fisso.

La variazione della coppia d'impulso è eguale alla coppia istantanea generata dalle forze esterne; che, in tal caso, si riducono alle sole reazioni di O e O'. Se scegliamo O come origine, dovremo considerare la sola coppia generata dalla reazione di O'. Può il corpo non esercitare pressione su O'? Allora la coppia d'impulso è costante ed il piano tangente ad $\mathfrak{E}$ nel polo di rotazione è un piano fisso; dunque deve risultare normale all'asse; cioè $O O'$ è un asse principale d'inerzia relativo ad O.

Allo stesso risultato si giunge osservando che se $\dot{\omega} = M_x = M_y = X' = Y' = 0$, dalle (14) risulta $A' = B' = 0$.

Se un corpo rigido, avente un punto fisso e non soggetto a forze, ruota inizialmente intorno ad uno degli assi d'inerzia relativi al punto fisso, esso seguiterà a ruotare uniformemente intorno allo stesso asse, come se fosse fisso.

Per questa proprietà gli assi principali d'inerzia diconsi *assi permanenti di rotazione* *.

Se vogliamo che anche il punto O non risenta pressione, l'asse fisso deve pure essere asse principale rispetto O'; quindi deve essere asse principale relativo al centro di massa; e ciò risulta pure dalle (13), dalle quali, posto

$$R_x = R_y = X = X' = 0,$$

si ha $\xi = \eta = 0$.

Se un corpo rigido libero non soggetto a forze ruota inizialmente intorno ad uno degli assi principali relativi al centro di massa, seguiterà a ruotare uniformemente intorno allo stesso asse, come se fosse fisso.

Per questo, gli assi centrali diconsi *assi spontanei di rotazione.*

b) Diciamo *pendolo composto* un corpo rigido pesante sospeso intorno ad un asse orizzontale. Sia φ l'angolo che il piano condotto pel centro di massa e per l'asse orizzontale (*asse di sospensione*) forma con un piano verticale condotto per lo stesso. Scelto l'asse z verticale, positivo verso il basso, l'energia potenziale di una massa m è $-mgz$: e quella di tutto il corpo è $-g\zeta\sum m$, dove la ζ è relativa al centro di massa G. Se l è la sua distanza

*) SEGNER, *Programma sistens specimen theoriae turbinum,* Halae (1755).

dall'asse di sospensione, sarà $\zeta = l \cos \varphi$ e quindi

$$\Pi = -g l \cos \varphi \sum m.$$

L'integrale (15) ci dà subito

$$\mathfrak{J} \dot{\varphi}^2 = h + 2 g l \cos \varphi \sum m,$$

e se diciamo k il raggio d'inerzia del corpo rispetto l'asse di sospensione, otteniamo

$$(16) \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{2 g l}{k^2} (\cos \varphi + \text{cost.}).$$

Nel caso del pendolo semplice (Cap. 2°, for. 13) si è trovato

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2 g}{a} (\cos \varphi + \text{cost.});$$

e che questa sia un caso particolare della (16) si può vedere così: supposto ridotto il corpo ad un punto materiale oscillante alla distanza a dall'asse di sospensione ed in un piano normale, si ha $a = l$ e $k = a$; dopo ciò le due precedenti equazioni diventano identiche;

*Un pendolo composto oscilla, nel vuoto, come **un** pendolo semplice, la cui lunghezza è $k^2 : l$.*

Sia k_1 il raggio d'inerzia relativo ad un asse condotto pel centro di massa e parallelo all'asse di sospensione: si ha

$$k^2 = k_1^2 + l^2$$

onde

$$a = \frac{k^2}{l} = \frac{k_1^2}{l} + l > l.$$

I punti distanti di a dall'asse di sospensione

e situati su di una retta che dicesi *asse di oscillazione,* oscillano dunque come tanti pendoli semplici; cioè come se fossero liberi;

Le piccole oscillazioni di un pendolo composto sono isocrone e la loro durata è $\pi \sqrt{\frac{k^2}{g l}}$.

Il centro di massa giace tra l'asse di sospensione e di oscillazione e dista da questi rispettivamente di l e di $l_1 = \frac{k_1^2}{l}$; onde $l l_1 = k_1^2$; cioè *i due assi sono invertibili;* sicchè facendo oscillare il corpo intorno all'asse di oscillazione, l'asse primitivo di sospensione diventa il nuovo asse di oscillazione; la durata di oscillazione è la stessa per entrambi, e la loro distanza è la lunghezza del pendolo semplice sincrono al composto.

Se, sempre nel piano verticale del centro di massa e dell'asse, consideriamo due rette a distanze diverse e da parti opposte di G, alle quali, assunte come assi di sospensione, corrisponda la stessa lunghezza del pendolo sincrono, la distanza tra i due assi è a. Infatti da

$$a = l + \frac{k_1^2}{l} = l_1 + \frac{k_1^2}{l_1}, \quad (l \neq l_1)$$

si deduce

$$l l_1 = k_1^2 .$$

Posto $\tau = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ e $\lambda = \frac{g}{\pi^2}$ (lunghezza del

pendolo a secondi) si ha

$$l^2 + k_1^2 = \lambda l \tau^2,$$

e per un altro asse

$$l_1^2 + k_1^2 = \lambda l_1 \tau_1^2.$$

Eliminando k_1:

$$\frac{l^2 - l_1^2}{\lambda} = l\tau^2 - l_1\tau_1^2$$

che dà λ e sulla quale non ha più influenza la forma e struttura del corpo. Se i due tempi sono eguali risulta ($l \neq l_1$)

$$\frac{l + l_1}{\lambda} = \tau^2$$

e quindi per la misura di λ occorre far oscillare il corpo intorno a due assi fino a che i tempi siano eguali: ed occorre misurare la sola distanza tra i due assi, evitando cioè la determinazione sperimentale di G. Su ciò è fondato il cosidetto pendolo reversibile di KATER *.

Il punto in cui l'asse di oscillazione taglia la verticale di G dicesi *centro di oscillazione* **.

§ 5. **Percossa in un corpo rigido sospeso ad un asse fisso. Centro di percossa.** — Suppo-

* Phil. Trans. (1818).

** Tutta questa teoria è dovuta ad HUYGHENS, l. c., Part. IV. Il problema del pendolo composto, è stato uno dei primi ad essere risoluti sui corpi rigidi, col sussidio dell'integrale della conservazione dell'energia; sul metodo usato da HUYGHENS vedi MACH, l. c., pag. 170.

niamo il corpo soggetto ad una forza di percossa (A, B, Γ) il cui punto d'applicazione è (α, β, γ); diciamo X, Y, Z; X', Y', Z' le componenti delle percosse dei punti di sospensione O ed O'.

Procedendo come al § 3, ed applicando quanto si espose al Cap. 3°, § 2, abbiamo

$$\Delta U = \mathrm{A} + X + X', \text{ ecc.}$$

$$\Delta P = \beta \Gamma - \gamma \mathrm{B} - h Y', \quad \Delta Q = \gamma \mathrm{A} - \alpha \Gamma + h X'$$

$$\Delta R = \alpha \mathrm{B} - \beta \mathrm{A}.$$

Poichè $R = \mathfrak{J} \omega$, quest'ultima ci dà

$$\mathfrak{J} \Delta \omega = \alpha \mathrm{B} - \beta \mathrm{A},$$

e quindi ci farà conoscere la variazione della velocità angolare dovuta alla percossa. Coi valori precedentemente trovati per $U, V, \ldots$ (§ 3) le equazioni precedenti si trasformano in queste

$$-\eta \Delta\omega . \sum m = \mathrm{A} + X + X', \qquad \xi \Delta\omega . \sum m = \mathrm{B} + Y + Y'$$

$$0 = \Gamma + Z + Z'$$

$$-\mathrm{B}' \Delta\omega = \beta\Gamma - \gamma\mathrm{B} - hY', \qquad -\mathrm{A}' \Delta\omega = \gamma\mathrm{A} - \alpha\Gamma + hX'$$

dalle quali possiamo determinare X, X', Y, Y' e $Z + Z'$.

Vediamo a quali condizioni occorre soddisfare perchè le percosse di O e O' siano nulle.

Sarà $\Gamma = 0$, cioè la percossa normale all'asse di rotazione.

Scelgasi il piano xy in modo da contenere la percossa, e l'asse x normale alla stessa; quindi anche $\mathrm{A} = 0$, $\gamma = 0$, e in conseguenza $A' = B' = 0$; l'asse di rotazione deve essere asse principale d'i-

nerzia per uno dei suoi punti (origine). Inoltre $\eta = 0$, $B = \xi \Delta \omega . \sum m$; ma $\mathfrak{J} \Delta \omega = \alpha B$; donde

$$\alpha = \frac{\mathfrak{J}}{\xi \sum m} = \frac{k^2}{\xi},$$

che dà il punto d'applicazione della percossa; α è la distanza dell'asse di oscillazione dall'asse di sospensione (asse x) di un pendolo composto; tale punto, coincidente col centro di oscillazione, dicesi *centro di percossa.*

§ 6. **Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.** — Poniamo l'origine nel punto fisso e riferiamo il sistema ad una terna x_1, y_1, z_1 di assi fissi e anche ad una terna x, y, z d'assi connessi col sistema e la cui posizione rispetto alla prima sia fissata coi nove coseni direttori o coi tre angoli euleriani (Vol. 1°, pag. 74). Più precisamente sia

$$a_1 = \cos(x x_1),\; a_2 = \cos(y x_1),\; a_3 = \cos(z x_1);\; \text{ecc.}$$

I teoremi dell'impulso ci dànno subito le seguenti equazioni

$$(17) \quad \frac{d(\mathfrak{R} - O)}{dt} = R - O + F_1, \quad \frac{d(\mathfrak{M} - O)}{dt} = M - O,$$

essendo F_1 la reazione dell'origine. La seconda ci dice che *la velocità assoluta dell'estremità della coppia d'impulso è eguale alla coppia delle forze esterne.*

Rispetto alla terna connessa col corpo, I, J, K, pongasi

$$\mathfrak{R} - O = IU + JV + KW$$
$$\mathfrak{M} - O = IP + JQ + KR.$$

Allora ricordando le

$$\dot{I} = Jr - Kq, \text{ ecc.}$$

deduciamo subito

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{U} + Wq - Vr = R_x + X, \\ \dot{V} + Ur - Wp = R_y + Y \\ \dot{W} + Vp - Uq = R_z + Z \end{cases}$$

e poscia

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{P} + Rq - Qr = M_x \\ \dot{Q} + Pr - Rp = M_y \\ \dot{R} + Qp - Pq = M_z. \end{cases}$$

Le componenti P, Q, R della coppia d'impulso sono funzioni lineari ed omogenee delle p, q, r (§ 2) con coefficienti costanti; però i primi membri delle (19) conterranno linearmente $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$; i secondi membri dipendono, come le forze impresse al corpo, dalle coordinate dei vari punti, dalle loro velocità e dal tempo e però in ultima analisi verranno a dipendere dai coseni direttori e dalle loro derivate prime, le quali, in virtù delle formule di Poisson (Vol. 1°, pag. 95) possono essere eliminate.

Quindi i secondi membri dipendono dai nove coseni e da p, q, r.

Ora la risoluzione del problema esige eviden-

temente la ricerca di p, q, r e dei nove coseni mediante t; però essa dipende dalla simultanea integrazione del sistema (19) e del sistema

$$(20)\quad \begin{cases} \dot{a}_1 = r a_2 - q a_3, \qquad \dot{a}_2 = p a_3 - r a_1, \\ \qquad \dot{a}_3 = q a_1 - p a_2; \text{ ecc.} \end{cases}$$

cioè di un sistema di 12 equazioni differenziali di primo ordine e lineari. Integrato questo sistema, le (18) ci faranno conoscere la reazione del punto fisso. Poichè

$$U = (q\zeta - r\eta) \sum m$$

il sistema (18) si trasforma in quest'altro

$$(\dot{q}\zeta - \dot{r}\eta) \sum m + q(p\eta - q\xi) - r(r\xi - p\zeta) \\ = R_x + X, \text{ ecc.}$$

Notiamo finalmente che rispetto agli assi fissi, dalle (17) otteniamo

$$(21)\quad \dot{P}_1 = M_{x_1}, \quad \dot{Q}_1 = M_{y_1}, \quad \dot{R}_1 = M_{z_1}.$$

Il sistema (19) si semplifica notevolmente scegliendo per terna x, y, z quella degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso. In tal caso infatti

$$(22)\qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

e quindi

$$P = Ap, \qquad Q = Bq, \qquad R = Cr;$$

il sistema (19) assume la seguente forma di EULER:

$$(23) \quad \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_x \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_z \end{cases} *.$$

§ 7. **Moto per inerzia; moto alla Poinsot.** — Consideriamo il caso particolare di un corpo non soggetto a forze; oppure di un corpo pesante sospeso pel suo centro di massa.

In questi due casi essendo $M - O = 0$, le equazioni (23) diventano

$$(24) \quad \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0, \end{cases}$$

e contengono solamente p, q, r e le loro derivate. Il problema del moto, dal punto di vista della integrazione, si spezza in altri due che consistono: nella determinazione della velocità istantanea di rotazione rispetto agli assi principali d'inerzia, che

---

* La soluzione del problema di questo § fu iniziata da D'ALEMBERT *(Rech. sur la précession des équinoxes)* e poi da EULER nella memoria già citata *Découverte d'un nouv. princ.*, etc. (1750); in cui trovansi le equazioni analoghe alle (23), ma ancora complicate coi prodotti d'inerzia. Scoperta l'esistenza degli assi principali d'inerzia (SEGNER, 1755), EULER semplificò subito le equazioni già trovate [Mém. de l'Ac. de Berlin (1758), pag. 154], ottenendo così le (23) e trattando diffusamente il caso del § seguente. Vedi pure D'ALEMBERT, *Opusc. Mathém.*, I (1761), EULER, *Theoria motus*, etc. Cap. XI, ... XV.

dipende dalla integrazione di (24); e poscia nella determinazione del moto di questi assi, rispetto agli assi fissi.

I teoremi generali forniscono subito una elegante rappresentazione del moto e due integrali del sistema (24). Infatti il teorema della conservazione dell'energia ci dice subito che l'energia cinetica è costante: dunque, per la (22),

$$(25) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$$

che agevolmente si deduce da (24) moltiplicando rispettivamente per p, q, r, sommando ed integrando.

Inoltre è $M - O = 0$ e quindi, (17), risulta $\mathfrak{M} - O =$ cost.; cioè costante l'asse della coppia d'impulso relativa al punto fisso: quindi

$$P^2 + Q^2 + R^2 = k^2$$

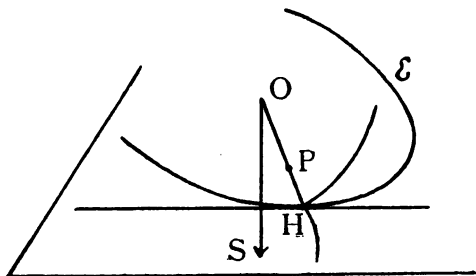
oppure

$$(26) \qquad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2;$$

che si deduce pure facilmente da (24) moltiplicando per Ap, Bq, Cr, sommando ed integrando.

Le due costanti h e k restano poi determinate dalle condizioni iniziali.

Sia (Fig. 9) OS l'asse della coppia d'impulso; $H - O$ il vettore Ω della rotazione, applicato in O. Il piano tangente in H all'ellissoide $\mathfrak{E}$, simile e similmente posto all'ellissoide d'inerzia, è normale ad OS (§ 2); il semiprodotto scalare di $S - O$ per $H - O$, cioè l'energia cinetica, è costante; dunque è costante la proiezione di OH su OS; cioè il piano

tangente in H ad $\mathfrak{E}$, staccando normalmente da

(Fig. 9).

OS un segmento costante, è un piano fisso:

Nel moto, per inerzia, di un sistema rigido avente un punto fisso, tutti gli ellissoidi simili e similmente posti all'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso, rotolano senza strisciare su piani fissi *.

Senza strisciare; perchè il punto di contatto H è sempre il polo di rotazione.

La curva descritta da H sul piano fisso è la *erpoloide* che è quindi una curva piana e, in generale, trascendente (Vol. 1°, pag. 130).

Le coordinate di H rispetto agli assi mobili (d'inerzia) sono p, q, r; le (25) e (26) esprimono quindi che H trovasi nella intersezione di due ellissoidi concentrici e aventi le stesse direzioni degli assi; però il luogo di H, nel corpo, cioè la *poloide*

---

* POINSOT, m. c.

è una curva di quarto ordine. Il cono della poloide è un cono di secondo grado.

Infatti, combinando opportunamente (25) e (26) abbiamo che la equazione di questo cono è

$$(27)\quad \begin{cases} A(Ah-k^2)p^2+B(Bh-k^2)q^2 \\ \qquad +C(Ch-k^2)r^2=0. \end{cases}$$

Supponiamo

$$A>B>C;$$

risulta

$$Ah-k^2=B(A-B)q^2+C(A-C)r^2,$$

e quindi

$$Ah-k^2>0,$$

a meno che inizialmente non sia $q=r=0$. In tal caso $Ah-k^2=0$ e quindi sarà sempre $q=r=0$ e $p=\text{cost.}$; siamo nel caso degli assi permanenti di rotazione.

Allo stesso modo si deduce che

$$Ch-k^2<0$$

eccetto nel caso che il corpo ruoti uniformemente intorno z.

Se poi nel valore di $Ah-k^2$ mutiamo A in B, e p in q, concludiamo che

$$Bh-k^2 \gtreqless 0.$$

Nell'ipotesi di $Bh-k^2>0$, l'intersezione del cono della poloide col piano $z=r=\text{cost.}$ è una ellissi; dunque il cono avvolge l'asse z; *la poloide consta di due rami chiusi simmetrici intorno l'asse*

di momento d'inerzia minimo. Uno solo di questi rami è descritto nel movimento.

Se invece $Bh - k^2 < 0$, la stessa conclusione è valida per l'asse di momento massimo.

Finalmente se $Bh - k^2 = 0$, il cono si spezza in due piani reali e la poloide in due ellissi i cui piani, passanti per l'asse medio, sono egualmente inclinati sul piano xy.

Questo caso è notevole anche per un'altra circostanza che ora diremo.

Vediamo, sommariamente, come il problema possa ridursi alle quadrature.

Scelgasi l'asse fisso z_1 nella direzione OS dell'asse della coppia d'impulso. Poichè

$$\cos(xz_1) = P : k = Ap : k = c_1 \text{, ecc.}$$

avremo

$$\frac{Ap}{k} = c_1, \qquad \frac{Bq}{k} = c_2, \qquad \frac{Cr}{k} = c_3$$

cioè *le componenti della rotazione istantanea sono proporzionali ai coseni direttori di una retta* (Vol. 1°, pag. 144-145).

Poniamo $c_3 = u$, cioè $r = \frac{ku}{C}$ ed esprimiamo p e q in funzione di u risolvendo le (25) e (26); si ha

$$p^2 = \frac{k^2(B-C)}{AC(A-B)}\left[u^2 - \frac{C(Bh-k^2)}{k^2(B-C)}\right],$$

e poscia, cambiando A in B,

$$q^2 = \frac{k^2(A-C)}{BC(A-B)}\left[\frac{C(Ah-k^2)}{k^2(A-C)} - u^2\right].$$

Consideriamo il caso in cui $Bh - k^2 > 0$, e poniamo

$$a^2 = \frac{C(Ah-k^2)}{k^2(A-C)}, \qquad b^2 = \frac{C(Bh-k^2)}{k^2(B-C)}.$$

Risulta

$$a^2 - b^2 = \frac{C}{k^2}\,\frac{(Ch-k^2)(B-A)}{(A-C)(B-C)} > 0$$

e

$$pq = \frac{k^2}{C(A-B)}\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\sqrt{(u^2-b^2)(a^2-u^2)},$$

quindi la terza delle (24) diviene

$$\frac{du}{dt} = n\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)},$$

dove

$$n = \frac{k}{C}\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}};$$

e che con una quadratura ci dà u mediante t. La quadratura si effettua colle funzioni ellittiche.

Perchè p sia reale, deve essere $u^2 > b^2$; mentre per la realtà di q deve essere $u^2 < a^2$; dunque u deve variare nell'intervallo $+b$, $+a$; oppure tra $-a$ e $-b$; u, e quindi r, non si annulla mai e però non cambia mai di segno, cioè u conserva il segno che ha per $t = 0$: p. es. positivo.

Se u varia da b ad a, p, dapprima nullo, cresce

e quindi $\dot{p} > 0$ e q negativo: quando p avrà raggiunto il suo valor massimo a, $\dot{p}$ si annulla; dopo p decresce e però q è positivo; ecc. Si ha dunque il mezzo di fissare, in ogni istante, i segni dei radicali.

Le proprietà esposte si interpetrano facilmente; infatti il cono descritto dall'asse z, intorno z_1, risulta sempre compreso tra due coni rotondi, cui risulta periodicamente tangente. La velocità angolare ω, come p, q, r, risulta compresa tra due limiti facili a fissarsi; quindi anche l'erpoloide è compresa tra due cerchi ai quali è tangente.

Ricordando che (Vol. 1°, pag. 74)

$$c_1 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta, \quad c_2 = \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta, \quad c_3 = \cos \vartheta,$$

senza altre quadradure conosceremo φ; inoltre (ibidem, pag. 133)

$$p = \dot{\vartheta} \cos\varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \quad q = -\dot{\vartheta} \operatorname{sen}\varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi$$
$$r = \dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}.$$

Di qui otteniamo

$$\dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta = p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi; \quad \dot{\psi} \operatorname{sen}^2 \vartheta = p c_1 + q c_2,$$

cioè

$$\dot{\psi} (1 - u^2) = \frac{A p^2 + B q^2}{k} = \frac{h - C r^2}{k} = \frac{C h - k^2 u^2}{C k},$$

che ci farà conoscere ψ, mediante t, con un'altra quadratura.

Consideriamo due casi particolari.

Se $h B - k^2 = 0$, si ha $b = 0$; l'equazione

differenziale in u, diventa

$$n\,dt = \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}};$$

colla sostituzione

$$u = \frac{a}{\mathrm{Ch}\,v},$$

avremo

$$v = \frac{n}{a}(\tau - t);$$

le quadrature si effettuano colle funzioni elementari.

Un altro caso particolare interessante è quello in cui l'ellissoide d'inerzia è di rotazione. Sia $A = B$; quindi, per la terza delle (24) $r =$ cost. e la poloide diventa un cerchio dell'ellissoide; *il cono della poloide è un cono rotondo il cui asse è l'asse di rotazione dell'ellissoide.* Dalla (25) si deduce che $p^2 + q^2 =$ cost. dunque è costante ω e però è anche costante l'angolo tra OS ed OH: *il cono della erpoloide è pure un cono rotondo avente per asse, l'asse della coppia d'impulso.* L'erpoloide è un cerchio.

In quanto agli angoli d'EULER, si ha $\vartheta =$cost., $\dot{\psi} = \frac{k}{A}$, quindi ψ cresce proporzionalmente al tempo: e lo stesso dicasi per φ *.

---

* Questo problema, diffusamente trattato, analiticamente, da EULER nella *Theoria motus*, etc., ricevette quasi la sua definitiva soluzione sintetica da POINSOT, l. c., e poi da JA-

§ 8. **Moto di un corpo rigido pesante sospeso per un punto fisso.** — Teniamo le stesse notazioni del § precedente e l'asse fisso z_1 sia verticale, positivo verso il basso. Applichiamo le equazioni (23): però osserviamo che il centro di massa, le cui coordinate rispetto agli assi d'inerzia diremo ξ, η, ζ, è sollecitato da una forza diretta secondo z_1 ed eguale al peso del corpo che diremo μ; le componenti secondo gli assi fissi essendo 0, 0, μ; quelle secondo gli assi mobili sono μc_1, μc_2, μc_3 e però

$$M_x = \mu(\eta c_3 - \zeta c_2), \text{ ecc.}$$

Le equazioni (23) diventano

$$(28) \quad \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = \mu(\eta c_3 - \zeta c_2) \\ B\dot{q} + (A - C)rp = \mu(\zeta c_1 - \xi c_3) \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \mu(\xi c_2 - \eta c_1), \end{cases}$$

insieme colle quali bisognerà considerare le equa-

COBI che in modo elegante espresse i coseni direttori mediante funzioni razionali di funzioni doppiamente periodiche di 2ª specie (Ges. Werke, **2**).

Si può consultare: HERMITE, *Sur quelques appl. d. fonc. ellip.*, Paris (1885), pag. 23; HALPHEN, *Traité des Fonc. ellipt.*, **2**, pag. 75 e seg.; KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., pag. 454.

Finalmente sulla storia di questo problema cfr. GILBERT, *Étude historique et critique sur le problème de la rotation*, etc. [Annal. de la Soc. scientif. de Bruxelles, **2** (1878)]. In una monografia del sig. DOMOGAROFF (Pietroburgo, 1893) *Sul moto libero di un giroscopio,* si trova una estesa e cronologica bibliografia del problema.

zioni

(29) $\dot{c}_1 = rc_2 - qc_3, \ \dot{c}_2 = pc_3 - rc_1, \ \dot{c}_3 = qc_1 - pc_2.$

Di guisa che il sistema delle dodici equazioni del caso generale (§ 6) si scinde, nel caso attuale, in due sistemi distinti di sei equazioni simultanee di primo ordine. Consideriamo anzitutto il sistema (28) e (29). Poichè $M_{z_1} = 0$, la terza delle (21) ci dà subito $R_1 =$ cost.: cioè *è costante la componente verticale della coppia d'impulso*. Dunque sarà

$$Pc_1 + Qc_2 + Rc_3 = \text{cost.}$$

od anche

(30) $$Apc_1 + Bqc_2 + Crc_3 = \text{cost.}$$

che è un integrale del sistema (28) e (29); e questo può subito verificarsi moltiplicando le (28) rispettivamente per c_1, c_2, c_3; le (29) per Ap, Bq, Cr e poi sommando ed integrando.

Ha luogo l'integrale della conservazione dell'energia e poichè l'energia potenziale è espressa da

$$\Pi = -\sum mgz_1 = -\mu(c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta),$$

così abbiamo un secondo integrale

(31) $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h + 2\mu(c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta);$

che può dedursi a sua volta dal sistema (28), (29) moltiplicando le (28) per p, q, r, sommando ed integrando con riguardo alle (29).

Infine si noti che un integrale di (29) è

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

e però conosciamo in tutto tre integrali; il sistema suddetto poi equivale al seguente di cinque equa-

zioni

$$(32) \quad dp:dq:dr:dc_1:dc_2:dc_3 = \mathfrak{P}:\mathfrak{Q}:\mathfrak{R}:\mathfrak{C}_1:\mathfrak{C}_2:\mathfrak{C}_3,$$

in cui $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ... $\mathfrak{C}_3$ hanno valori conosciuti e non contengono esplicitamente il tempo. Integrato questo sistema e quindi espresse tutte le funzioni mediante una di esse, p, ad esempio, assunta come variabile indipendente; si determina p mediante t con una quadratura considerando la

$$dp : \mathfrak{P} = dt.$$

Del sistema (32) conosciamo tre integrali: inoltre

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial p} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial q} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{C}_3}{\partial c_3} = 0;$$

si sa che in tal caso se si riesce a trovare un quarto integrale del sistema (32), distinto dai già noti, con una sola quadratura se ne può trovare un quinto ed allora *la risoluzione del problema è ricondotta alle quadrature* *.

Ma, in generale e prescindendo da speciali condizioni iniziali di moto, questo quarto integrale non si è assegnato. Si sa assegnare in alcuni casi particolari e cioè:

1°. Corpo sospeso pel suo centro di massa. Si ha $\xi = \eta = \zeta = 0$ e però anche $P_1 =$ cost.;

* JACOBI, *Vorles. u. Dynamik.*, pag. 90 e seg. e per una rapida esposizione della teoria dell'ultimo moltiplicatore, vedi: MAGGI, l. c., pag. 246.

$Q_1 =$ cost. ricadiamo nel caso del § precedente. (Caso di EULER e POINSOT).

2°. L'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso è di rotazione intorno a z, sul quale giace il centro di massa. Queste condizioni sono certamente verificate se *il corpo è omogeneo di rivoluzione e sospeso per un punto del suo asse di simmetria.* (Caso di LAGRANGE *.

Si ha infatti $A = B$, $\xi = \eta = 0$: e la terza delle (28) ci dà subito $r =$ cost.

3°. Caso della KOVALEVSKIJ **. Si ha

$$A = B = 2\,C, \qquad \zeta = 0,$$

ed anche in questo caso si può assegnare un quarto integrale algebrico delle (28), (29).

Nei primi due casi le quadrature si effettuano colle funzioni ellittiche; nel terzo caso colle fun-

---

* LAGRANGE, Œuvres comp., **12**, pag. 253.

Anche su questo caso si hanno numerosi ed importanti lavori: tra i più fondamentali quello di JACOBI, Ges. Werke, **2**, pag. 477-514. Per la riduzione a quadrature col sussidio delle funzioni ellittiche, vedi HALPHEN, l. c., **2**, pag. 81, KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., pag. 199 e pag. 392.

** Acta mathematica, **12** (1889), oppure: Mém. pres. par divers savants étrangers, **31**, N. 1. Anche questo caso ha dato luogo a numerosi lavori. La ricerca dei novi coseni direttori è stata eseguita dal sig. F. KÖTTER, Acta mathem., **17**, pag. 247 (1893). Alcuni geometri russi si sono occupati anche della interpetrazione cinematica di questo caso.

zioni iperellittiche. In tutti e tre poi le p, q, r sono funzioni uniformi di t che non hanno altri punti singolari che dei poli a distanza finita *.

§ 9. **Moto di un corpo rigido libero.** — Applicheremo ancora i teoremi dell'impulso: ma invece di assumere come centro di riduzione un punto fisso O, assumeremo un punto G fisso nel corpo. Allora se rispetto a questo nuovo centro diciamo ancora $\mathfrak{R} - O$ ed $\mathfrak{M} - O$ il vettore ed il momento risultante dell'impulso, avremo (Vol. 1°, pag. 17)

$$\frac{d(\mathfrak{R} - O)}{dt} = R - O$$

* APPELROTH nella memoria *Sul problema del moto,* etc., (Mosca 1893), completando l'analisi della KOVALEVSKIJ ha dimostrato che i casi enumerati sono i soli in cui gl'integrali sono uniformi. Se si suppone anche l'esistenza dei poli si ottiene un altro caso, detto di HESS, Mathem. Ann. **37** (1890); vedi pure NEKRASSOFF (ibidem, **47**, 1893).

Finalmente è da notare che il sig. R. LIOUVILLE, Acta math., **20**, ha dimostrato che il sistema (28), (29) ammette un quarto integrale algebrico indipendente dal tempo, se $\zeta = 0$ e inoltre:

$$A = B = \frac{2C}{n}$$

(con n intero positivo).

I soli valori possibili sono: $n = 1$, (caso della KOVALEVSKIJ); $n = 2$, caso della sfera; $n = 3$ e 4, casi nuovi, nei quali l'integrale non è stato però assegnato.

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{M} - O + |(G - O)(\mathfrak{R} - O)]$$
$$= M - O + |(G - O)(R - O).$$

Sviluppando questa seconda si ha

$$\frac{d(\mathfrak{M} - O)}{dt} + |(G - O)\frac{d(\mathfrak{R} - O)}{dt} + |\dot{G}(\mathfrak{R} - O)$$
$$= M - O + |(G - O)(R - O)$$

e quindi abbiamo

$$(33) \quad \begin{cases} \dfrac{d(\mathfrak{R} - O)}{dt} = R - O, \\ \dfrac{d(\mathfrak{M} - O)}{dt} + |\dot{G}(\mathfrak{R} - O) = M - O. \end{cases}$$

Se rispetto ad una terna x, y, z coll'origine in G e connessa col corpo diciamo u, v, w le componenti della velocità di G, e conserviamo nel resto le notazioni dei § precedenti, le (33) ci daranno rispettivamente

$$(34) \quad \begin{cases} \dot{U} + Wq - Vr = R_x ; \text{ ecc.} \\ \dot{P} + Rq - Qr + Wv - Vw = M_x , \text{ ecc.} \end{cases}$$

Ricordando poscia che le U, V, ... R sono le derivate dell'energia cinetica rispetto u, v, ... r, si vede subito che il sistema precedente contiene, a primo membro, linearmente le derivate di u, v, ... r, cioè le derivate delle coordinate del moto istantaneo. I secondi membri dipenderanno dalle coordinate ξ, η, ζ di G rispetto agli assi fissi e dai nove coseni direttori e loro derivate. Insieme quindi

col sistema (34) dovremo considerare il sistema delle 9 equazioni di POISSON, e inoltre le

$$\dot{\xi} = a_1 u + a_2 v + a_3 w, \text{ ecc.}$$

Si può utilmente sostituire ai coseni, i tre angoli di EULER.

Si ottiene una notevole semplificazione scegliendo per punto G il centro di massa del corpo e per assi x, y, z gli assi principali d'inerzia.

Allora l'espressione di T è data dalla (6): quindi le (34) diventano

$$(35) \quad \begin{cases} (\dot{u} + qw - rv) \sum m = R_x; \text{ ecc.} \\ A\dot{p} + (C - B) qr \quad = M_x; \text{ ecc.} \end{cases}$$

Nel caso del corpo pesante $M - O = 0$; le ultime tre precedenti si possono integrare indipendentemente dalle prime e definiscono un moto alla POINSOT (§ 7); mentre il teorema sul moto del centro di massa ci dice (Cap. 4°, § 7) che G descrive una parabola. In questo caso abbiamo decomposto il movimento in due: quello del centro di massa e quello del corpo intorno al centro di massa riguardato come fisso.

Tale decomposizione ha luogo tutte le volte che M_x, ... non dipendono da u, v, w. Così ancora se tutti i punti del corpo sono attratti da un centro fisso O proporzionalmente alla distanza, la risultante di queste forze è una forza applicata in G e proporzionale alla distanza da O (Vol. 1°,

pag. 181), onde G descrive una ellissi intorno ad O (ibidem, pag. 43) mentre il moto del corpo intorno a G riducesi ad un moto alla POINSOT.

Conviene, a volte, riferire la posizione del corpo ad una terna qualunque x, y, z non rigidamente connessa col sistema. Se in tal caso diciamo p', q', r' le componenti della rotazione istantanea intorno x, y, z avremo

$$(\dot{u} + q'w - r'v) \sum m = R_x; \text{ ecc.}$$

mentre le ultime tre di (34) dànno

$$\dot{P} + q'R - r'Q = M_x; \text{ ecc.}$$

ma nel derivare P, ... rispetto al tempo occorre ora riflettere che le A, B, C, ... variano col tempo.

Notiamo un caso particolare. Se l'asse z è connesso rigidamente col corpo, un punto di questo (0, 0, z) deve avere la stessa velocità assoluta sia che venga considerato come facente parte del corpo o della terna e quindi

$$q'z - r'y = qz - ry$$

cioè

$$q'z = qz$$

e quindi $q = q'$ e così $p = p'$, mentre $r \neq r'$.

Se, ancora più in particolare, il corpo ha un punto fisso ed è di rotazione intorno z, assumendo per assi x, y due assi qualunque in un piano per O condotto normalmente a z, si ha $A = B$ (in-

dipendenti da t) e quindi abbiamo le equazioni *

$$(36)\qquad \begin{cases} A\dot{p} + (Cr - Ar')q = M_x \\ A\dot{q} - (Cr - Ar')p = M_y \\ C\dot{r} \qquad\qquad\quad = M_z . \end{cases}$$

§ 10. **Percossa in un corpo rigido con un punto fisso o libero.**— Conforme ai soliti teoremi, dovremo applicare le equazioni analoghe alle (17) cioè

$$\Delta(\mathfrak{R} - O) = R - O + F_1, \quad \Delta(\mathfrak{M} - O) = M - O$$

in cui $R - O$ ed $M - O$ rappresentano le coordinate della percossa ed F_1 la forza di percossa del punto fisso, mentre $\mathfrak{R} - O$ ed $\mathfrak{M} - O$ sono le coordinate dell'impulso. Rispetto agli assi d'inerzia si ha dunque

$$\Delta P = M_x, \text{ ecc.}$$

cioè

$$A(p_{+0} - p_{-0}) = M_x; \text{ ecc.}$$

Se quindi il momento della percossa non è nullo, il moto di rotazione varia bruscamente. Se all'istante t_0 il corpo è in riposo, $p_{-0} = 0$, ecc. onde

$$A p_{+0} = M_x, \text{ ecc.}$$

L'asse istantaneo di rotazione e il piano della coppia di percossa sono coniugati rispetto all'ellissoide d'inerzia.

Quindi *per gli assi principali d'inerzia, e per*

---

* APPELL, *Les mouvements de roulement,* etc., pag. 13.

questi solamente, l'asse di rotazione coincide coll'asse della coppia di percossa.

Finalmente per un corpo rigido libero, riferendoci agli assi centrali d'inerzia, si ha

$$(u_{+0}-u_{-0})\sum m = R_x, \text{ ecc.} \quad A(p_{+0}-p_{-0}) = M_x, \text{ ecc.}$$

Se il corpo parte dal riposo, abbiamo semplicemente

$$(37) \quad u\sum m = R_x, \text{ ecc.} \quad Ap = M_x, \text{ ecc.}$$

Quindi per ogni diname di percossa, potremo determinare l'asse di moto elicoidale (o della vite) intorno al quale il corpo comincerà a ruotare e a scorrere; dopo ciò il moto sarà retto dalle solite equazioni.

È possibile determinare una diname in modo che coincida colla corrispondente vite? Sia R, M la diname di parametro h e di coordinate $\alpha, \beta, \ldots \nu$. Avremo

$$p = \omega\alpha, \ldots, \qquad u = \omega\lambda + \tau\alpha,$$
$$R_x = R\alpha, \qquad M_x = M\alpha + R\lambda,$$

(ω e τ sono le velocità istantanee di rotazione e traslazione).

Sostituendo nella prima delle (37) si ha

$$(\tau\alpha + \omega\lambda)\sum m = R\alpha, \text{ ecc.}$$

e moltiplicando per α, β, γ e sommando,

$$\tau\sum m = R,$$

e quindi $\lambda = \mu = \nu = 0$. Allora

$$M_x = M\alpha = A\omega\alpha, \text{ ecc.}$$

e non potendo essere α, β, γ contemporaneamente nulli, deve essere M eguale ad $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$. Nel primo caso $\beta=\gamma=0$ ed abbiamo l'asse x. Inoltre

$$\frac{M}{R}=\frac{A}{\sum m}\cdot\frac{\omega}{\tau}.$$

Ma

$$\frac{A}{\sum m}=a^2, \quad \text{quindi} \quad h=a^2\frac{1}{h}$$

donde

$$h=\pm a.$$

Abbiamo dunque *sei* diname che rispondono al problema e che diconsi *diname o viti principali d'inerzia.*

In generale si dimostra:

Un corpo rigido con k gradi di libertà, possiede k viti o dinàme principali d'inerzia *.

§ 11. **Dell'urto di due corpi.** — Due corpi C_1 e C_2 liberi, le cui superficie sono liscie e convesse, vengono in un dato istante ad urtarsi in un punto H in cui risultano tangenti; ne segue una brusca variazione nel moto dei due corpi, che appunto si tratta di determinare. L'urto avvenga

---

* R. S. BALL, *Researches in the Dynamics of a Rigid Body by the aid of the Theory of Screws.* Phil. Trans. London **164**, Part. 1 (1873). Invitiamo lo studioso ad approfondire le belle teorie di BALL di cui potrà avere un cenno fugace nello scritto dello stesso autore: *Una parabola dinamica,* tradotto da G. VIVANTI nel Politecnico (1887).

senza attrito: cioè il sistema delle percosse subite dai due corpi nell'urto sia riducibile ad una percossa Π, eguale pei due corpi, ma incognita, applicata in H e diretta secondo la normale interna di ciascun corpo. Diciamo α_1, β_1, ... ν_1, le coordinate di questa normale volta verso l'interno di C_1 (di massa m_1 e riferito ai suoi assi centrali d'inerzia) ed u_1, v_1, ... r_1; u'_1, ... r'_1 le coordinate del moto elicoidale prima e dopo l'urto. Avremo (§ 10)

$$(38)\quad m_1(u'_1-u_1)=\Pi\alpha_1, \text{ ecc.}\quad A_1(p'_1-p_1)=\Pi\lambda_1, \text{ ecc.}$$

Per il secondo corpo sussisterà un sistema di equazioni analoghe, salvo il cambiamento dell'indice *uno* in *due*.

Abbiamo dunque *dodici equazioni*, insufficienti a determinare le 13 incognite, $u'_1, \ldots r'_1, u'_2, \ldots r'_2, \Pi$.

Per trovare un'altra equazione, diciamo T_1 e T'_1 l'energia cinetica di C_1 prima e dopo l'urto. Poichè

$$2\,T_1 = m_1(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2$$
$$2\,T'_1 = m_1(u'^2_1 + \cdots) + A_1 p'^2_1 + \cdots$$

tenendo conto delle (38) risulta

$$2(T'_1-T_1)=\Pi[\alpha_1(u'_1+u_1)+\cdots+\lambda_1(p'_1+p_1)+\cdots].$$

Diciamo V_1 e V'_1 le velocità di H secondo la normale esterna prima e dopo l'urto; si ha

$$-V'_1-V_1=\alpha_1(u'_1+u_1)+\cdots+\lambda_1(p'_1+p_1)+\cdots$$

e quindi

$$2(T'_1-T_1)=-\Pi(V'_1+V_1);$$

analogamente pel secondo corpo e però per l'energia cinetica complessiva avremo

$$(39)\quad 2(T' - T) = -\Pi(V_1 + V_2 + V_1' + V_2').$$

Ora l'esperienza insegna che in nessun caso si può avere aumento di energia cinetica; cioè in nessun caso $T' - T$ è positivo. Nel caso limite dei cosidetti corpi perfettamente elastici, tale differenza è nulla.

Passiamo alle velocità: se i due corpi prima dell'urto si corrono incontro, V_1 e V_2 sono entrambi positivi: se procedono invece nella stessa direzione, V_1, ad esempio, sarà positivo, V_2 negativo; ma perchè l'urto avvenga occorre che $V_1 > |V_2|$: onde prima dell'urto sarà sempre $V_1 + V_2 > 0$.

Dopo l'urto o i due corpi avranno rimbalzato e quindi V_1' e V_2' sono entrambi negativi: o i due corpi sono rimasti a contatto e quindi $V_1' + V_2' = 0$: però dopo l'urto sarà $V_1' + V_2' \leqq 0$. Ma il secondo membro di (39) deve essere negativo: dunque $V_1' + V_2'$ deve essere in valore assoluto minore di $V_1 + V_2$: e potremo porre

$$(40)\qquad V_1' + V_2' = -e(V_1 + V_2),$$

e essendo, per ogni coppia di corpi, un numero, da ritenersi sensibilmente costante, e compreso tra 0 ed 1; esso dicesi *coefficiente di elasticità all'urto o coefficiente di restituzione.*

Se $e = 0$ i corpi sono *anelastici*; se $e = 1$ sono

perfettamente elastici. La (40) è quindi la tredicesima equazione che ci occorreva.

Dalle (38) si deduce

$$u_1' = u_1 + \frac{\alpha_1}{m_1}\Pi, \ldots, p_1' = p_1 + \frac{\lambda_1}{A_1}\Pi, \text{ ecc.}$$

onde

$$V_1' = V_1 - \Pi\left[\frac{1}{m_1} + \frac{\lambda_1^2}{A_1} + \cdots\right]$$

e

$$V_2' = V_2 - \Pi\left[\frac{1}{m_2} + \frac{\lambda_2^2}{A_2} + \cdots\right].$$

Se dunque poniamo

$$k = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\lambda_1^2}{A_1} + \frac{\lambda_2^2}{A_2} + \cdots$$

risulta

$$V_1' + V_2' = -e(V_1 + V_2) = V_1 + V_2 - k\Pi,$$

e quindi

$$\Pi = \frac{(1+e)(V_1 + V_2)}{k}.$$

Trovato Π, troveremo subito u_1', ...

Poichè dall'urto non riceva cambiamento la velocità di rotazione dei due corpi, senza che sia $\Pi = 0$, occorre che

$$\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = 0;$$

cioè che la normale comune passi per i centri di massa: cioè *l'urto sia centrale.*

In questa ipotesi se i due corpi sono due sfere animate da un semplice moto di traslazione lungo

l'asse delle x, si ha

$$\Pi = \frac{u_1 + u_2}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} (1 + e).$$

Quindi nel caso della perfetta elasticità

$$\Pi = \frac{2m_1 m_2 (u_1 + u_2)}{m_1 + m_2}; \quad u'_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 - 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$u'_2 = \frac{2m_1 u_1 + (m_1 - m_2)u_2}{m_1 + m_2};$$

e se le due sfere sono eguali

$$u'_1 = -u_2, \quad u'_2 = u_1 \text{ *}.$$

Esercizi.

1. Momento d'inerzia d'una sfera o di un ellissoide omogeneo.

Basterà limitarci a considerare rette uscenti dal centro. Per la sfera

$$\int x^2 d\tau = \int y^2 d\tau = \int z^2 d\tau = \frac{1}{3} \int r^2 d\tau.$$

Ma l'elemento di volume è dato da $r^2 dr d\omega$, essendo $d\omega$ l'elemento di superficie sferica di raggio uno; onde

$$\int r^2 d\tau = 4\pi \int r^4 dr = \frac{4\pi R^5}{5};$$

quindi

* Poisson, *Traité de Mécanique*, 2e édition (1833), **2**, pag. 254. Vedi pure, per la storia di questa teoria, Mach, l. c., pag. 296.

$$a^2 = b^2 = c^2 = \frac{2}{5} R^2$$

dicendo a, b, c i raggi principali d'inerzia.

Per un ellissoide di semiassi a_1, b_1, c_1, colla sostituzione $x = x' a_1$, ... ci riduciamo alla sfera: quindi si trova

$$a^2 = \frac{b_1^2 + c_1^2}{5}, \text{ ecc.}$$

2. Momento d'inerzia d'un parallelepipedo rettangolo di spigoli a_1, b_1, c_1.

Posto il centro delle coordinate nel centro del parall. si ha

$$\int x^2 d\tau = \int x^2 dx\, dy\, dz = \frac{1}{12} a_1^3 b_1 c_1; \text{ ecc.}$$

onde

$$a^2 = \frac{1}{12}(b_1^2 + c_1^2); \text{ ecc.}$$

3. Momento d'inerzia d'un triangolo.

Il lato $OB = a$ del triangolo OAB poggi sull'asse rispetto al quale si deve calcolare il momento d'inerzia e sia $= 1$ la massa dell'unità di area. L'altezza di A sia α; una striscia dx alla distanza x da A ha per momento $\frac{a x}{\alpha}(\alpha - x)^2$; quindi integrando da $x = 0$ ad $x = \alpha$ si ha $\mathfrak{J} = \frac{1}{12} a \alpha^3$. Consideriamo ora un asse condotto per O nel piano del triangolo e sia OC; il lato AB incontri l'asse in C. Dette α e β le distanze di A e B da $OC = a$, abbiamo $\mathfrak{J} = \frac{1}{12} a(\alpha^3 - \beta^3)$; ma $\frac{1}{2} a(\alpha - \beta)$ è l'area di OAB e quindi anche la massa μ: onde

$$\mathfrak{J} = \frac{\mu}{6}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

Consideriamo tre masse, eguali ad $\frac{1}{3}\mu$, poste nei punti di mezzo dei lati; il loro momento d'inerzia rispetto OC è

$$\frac{\mu}{3}\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right];$$

cioè lo stesso di prima. Esse poi hanno lo stesso centro di massa del triangolo e però hanno lo stesso momento d'inerzia rispetto ad ogni retta. Abbiamo un semplice esempio di *sistemi di eguali momenti d'inerzia.*

Si può dimostrare che, per un tetraedro omogeneo si ha un sistema di eguali momenti ponendo ai quattro vertici quattro masse eguali ad $\frac{1}{20}$ della massa totale e nel centro di massa una massa eguale ai $\frac{4}{5}$ della massa totale.

[ROUTH, *The elem. part of a Treatise on the Dynamics of a System of rigid Body,* London 1891, pag. 28].

4. Cogniti gli assi centrali d'inerzia, determinare quelli relativi ad un altro punto qualunque.

Il punto sia x, y, z ed α, β, γ siano i coseni direttori di uno dei relativi assi; k il suo raggio d'inerzia; k_1 quello dell'asse parallelo condotto pel centro di massa: perchè il quadrato della distanza tra questi assi è

$$x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

e inoltre

$$k_1^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2,$$

si deduce

$$k^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+r^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$
$$-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2,$$
$$r^2=x^2+y^2+z^2,\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0.$$

Bisogna cercare i valori massimi o minimi di k e quindi di
$a^2\alpha^2+\ldots+(r^2-\lambda)(\alpha^2+\ldots)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$.

Eguagliando a zero le derivate si ha

$$(a^2+r^2-\lambda)\alpha=(\alpha x+\beta y+\gamma z)x, \text{ ecc.}$$

Moltiplicando per α, β, γ e sommando si ricava $\lambda=k^2$; e posto $k^2-r^2=u$ si ha

$$\alpha=\frac{x}{a^2-u}(\alpha x+\beta y+\gamma z);\text{ ecc.}$$

donde, se $\alpha x + \beta y + \gamma z \neq 0$, risulta

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1.$$

Gli assi principali relativi al punto x, y, z sono dunque le normali alle quadriche omofocali all'ellissoide reciproco a quello di inerzia passanti pel punto.

Se $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ e $\alpha \neq 0$ è $k^2 = a^2 + r^2$, $\beta = \gamma = 0$, $x = 0$, il punto P giace sul piano yz: uno degli assi principali è parallelo ad x e gli altri stanno su yz. Per questi, ripetendo lo stesso calcolo, nella ipotesi di $x=0$ e $\alpha = 0$, si giunge alle

$$\beta = \frac{y}{b^2 - u}(\beta y + \gamma z), \text{ ecc.}$$

e se $\beta y + \gamma z \neq 0$ si ricade su stesso risultato. Se poi $\beta y + \gamma z = 0$, si trova un punto degli assi, per il quale la ricerca è semplicissima.

[Binet, J. de l'École. Polytec. Cah. **16**, pag. 41 (1811)].

5. Trovare la condizione perchè una retta sia asse principale per un suo punto.

Se le coordinate della retta sono $\alpha, \beta, \ldots \nu$, da equazioni di esercizio precedente si deduce

$$a^2 \alpha \lambda + b^2 \beta \mu + c^2 \gamma \nu = 0;$$

onde le rette cercate formano un complesso quadratico (tetraedrale) (Vol. 1°, Cap. 1°, Eserc. 6). Cerchisi il punto P rispetto al quale la retta è asse d'inerzia.

Dall'origine O conduco la normale p su retta; siano x_1, y_1, z_1 coordinate del punto d'incontro; α_1, β_1, γ_1; i coseni direttori di p. Un punto qualunque di retta è $x_1 + t\alpha$, ecc. Ma $(a^2 - u)\alpha = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, x = (x_1 + t\alpha)\, t$; ecc. moltiplicando per α_1, β_1, γ_1 e sommando

$$a^2 \alpha \alpha_1 + b^2 \beta \beta_1 + c^2 \gamma \gamma_1 = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) t = p t$$

donde si ricava p; ecc.

6. Cognite le $A, B, \ldots C'$ relative ad una

terna, determinare le grandezze analoghe rispetto ad un'altra terna.

Supponiamo che la prima terna sia quella degli assi d'inerzia: e la seconda, la cui origine è (ξ, η, ζ), sia fissata rispetto alla prima dai soliti coseni. Detta μ la massa del sistema si ha subito (§ 1°)

$$A_1 = \mu(\eta^2 + \zeta^2) + A a_1^2 + B b_1^2 + C c_1^2 \text{; ecc.}$$

Inoltre

$$A'_1 = \sum m y_1 z_1 = \sum m(\eta + a_2 x + b_2 y + c_2 z)(\zeta + a_3 x + b_3 y + c_3 z)$$
$$= \mu \eta \zeta + a_2 a_3 \sum m x^2 + \ldots$$

e poichè

$$a_2 a_3 = - b_2 b_3 - c_2 c_3 \text{, ecc.}$$

così

$$A'_1 = \mu \eta \zeta - a_2 a_3 A - b_2 b_3 B - c_2 c_3 C \text{, ecc.}$$

7. Determinare il centro di oscillazione (percossa) di un rettangolo omogeneo sospeso per uno dei suoi lati, e quello di un triangolo isoscele sospeso per il vertice.

Se h è l'altezza, b la base del rettangolo, si trova subito

$$\mathfrak{J} = \int y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{3} b h^3 \text{;} \quad \text{onde} \quad k^2 = \frac{1}{3} h^2$$

ma $l = \dfrac{h}{2}$; però (§ 4)

$$a = \frac{k^2}{l} = \frac{2}{3} h.$$

Nell'altro caso abbiamo

$$a = \frac{3}{4} h$$

h essendo l'altezza del triangolo.

8. Un'asta rigida è mobile in un piano orizzontale e i suoi punti sono attratti dall'asse x pro-

porzionalmente alla distanza ed alla massa. Studiare il moto.

Per un punto P (di massa m) la forza ha per componenti o, $-\alpha^2 m y$; i teoremi dell'impulso ci dànno subito le seguenti equazioni in cui non figurano le reazioni del piano.

$$\frac{dU}{dt}=0, \quad \frac{dV}{dt}=-\alpha^2\sum my; \quad \frac{dR}{dt}=M_z=-\alpha^2\sum mxy.$$

Dette ξ, η le coordinate del centro di massa, le prime due dànno

$$\ddot{\xi}=0, \quad \ddot{\eta}=-\alpha^2\eta$$

che definiscono il moto del centro G.

Per G conduco due assi x_1, y_1 paralleli ai primi: sia φ l'angolo dell'asta con x e $\dot{\varphi}=\omega$, $\mu=\sum m$. Si trova subito

$$R=\mu(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})+\mu k^2\omega$$

(k raggio d'inerzia) e $\sum mxy=\sum mx_1y_1+\mu\xi\eta$; posto $x_1=r\cos\varphi$, $y_1=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, sostituendo nella 3ª e riducendo si ha

$$\ddot{\varphi}=-\alpha^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$$

che si discute come quella del pendolo.

[APPELL, l. c., **2**, pag. 144].

9. Due aste rigide eguali ed omogenee sono legate con due fili (lunghi l) AA', BB'. La AB ruota intorno ad un punto fisso O; e tutto il sistema in un piano verticale.

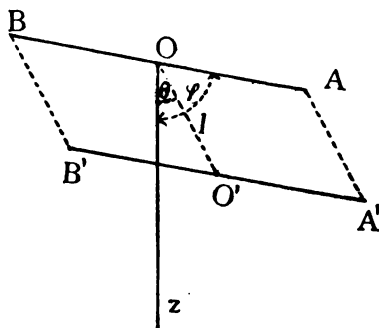
Si ha un sistema con due gradi di libertà; la verticale (verso il basso) per O (Fig. 10) formi angolo φ con OA e θ con OO'.

L'energia cinetica di AB è $\frac{1}{2}\mu k^2\dot{\varphi}^2$; quella di $A'B'$ (§ 3, Cap. 4°) è $\frac{1}{2}\mu k^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\mu l^2\dot{\theta}^2$. Inoltre il lavoro elementare è

$$d\mathfrak{L} = \mu g\, dz = -\mu g l \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Le equazioni di LAGRANGE ci dànno

(Fig. 10)

$$\dot{\varphi} = \text{cost.}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta.$$

Il moto di AB intorno O è uniforme, mentre quello di O' è un moto pendolare.

[APPELL, l. c., **2**, p. 152].

10. Un tubo sottilissimo, di massa μ, porta nel suo interno una massa m attratta da un punto O del tubo da una forza funzione della distanza. Tutto il sistema ruota intorno ad O in un piano orizzontale.

L'energia potenziale è $\varphi(r) = -\int f(r)\, dr$; l'energia cinetica è espressa da

$$2\,T = \mu k^2 \dot{\theta}^2 + m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

(r, θ coordinate polari di m); quindi

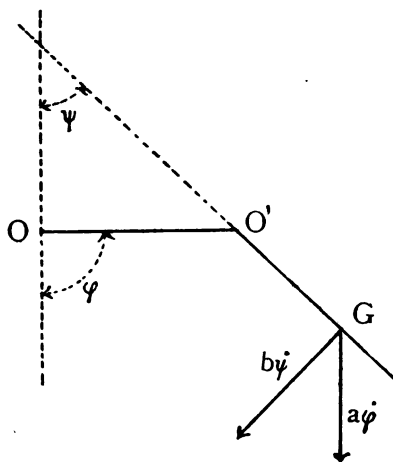
$$\mu k^2 \dot{\theta}^2 + m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = h + 2\varphi(r).$$

La componente R dell'impulso è costante: cioè $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = c$; onde

$$\mu k^2 \dot{\theta} + m r^2 \dot{\theta} = c;$$

ci riduciamo alle quadrature.

11. Un corpo rigido è sospeso ad un asse fisso; un altro corpo rigido è girevole intorno ad un altro asse, parallelo al primo e che fa parte del primo corpo. I corpi non sono soggetti a forze; determinare il moto.

Sia G il centro di massa del secondo corpo e si conduca per G un piano normale in O e O' ai due assi (piano del foglio). Sia (Fig. 11) $OO' = a$, $GO' = b$ e diciamo φ e ψ gli angoli che OO' e GO' formano con una retta fissa del piano e che individuano la posizione del sistema (2 gradi di libertà). L'energia cinetica del primo corpo è $\frac{1}{2} m k^2 \dot{\varphi}^2$ se m è la sua massa e k il raggio d'inerzia relativo all'asse O. Quella del secondo corpo comprende: 1° quella dovuta al moto rispetto a G; ed è espressa da

(Fig. 11)

$$\frac{1}{2} m_1 k_1^2 \dot{\psi}^2,$$

se m_1 è la massa del secondo corpo e k_1 il raggio d'inerzia rispetto ad un asse per G parallelo ai primi;

2° quella dovuta al moto di G in cui sia concentrata tutta

la massa ed espressa da $\frac{1}{2} m_1 v^2$, se v è la velocità di G. Quindi

$$2T = m k^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 k_1^2 \dot{\psi}^2 + m_1 v^2 .$$

La velocità v, a sua volta, è la risultante di $b\dot{\psi}$ normale ad $O'G$ e di quella $a\dot{\varphi}$, dell'asse O', normale ad OO', e che quindi comprendono un angolo $\varphi - \psi$ e però

$$v^2 = a^2 \dot{\varphi}^2 + b^2 \dot{\psi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi).$$

Le equazioni di LAGRANGE (2^a forma) dànno subito gl'integrali

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = c \quad \text{e} \quad 2T = h$$

cioè

$$(\alpha+\gamma)\dot{\varphi}+(\gamma+\beta)\dot{\psi}=c; \quad \dot{\varphi}(\alpha\dot{\varphi}+\gamma\dot{\psi})+\dot{\psi}(\gamma\dot{\varphi}+\beta\dot{\psi})=h$$

essendo

$$\alpha = m k^2 + m_1 a^2, \quad \beta = m_1 k_1^2 + m_1 b^2, \quad \gamma = ab\cos(\varphi-\psi).$$

Posto $\varphi - \psi = \omega$, valendoci del primo integrale possiamo esprimere $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ per ω e $\dot{\omega}$; sostituendo poscia nel secondo integrale si trova

$$\dot{\omega}^2 = \frac{h(\alpha + \beta + 2ab\cos\omega) - c^2}{\alpha\beta - a^2 b^2 \cos^2\omega} .$$

Il problema è ridotto alle quadrature.

[THOMSON a. TAIT, l. c., **1**, pag. 310; 324. SCHELL, l. c. **2**, pag. 549].

12. Stesso problema supponendo il secondo asse O' normale al primo. Il piano condotto per questo normalmente al secondo, lo taglia in un punto O' rispetto al quale è asse d'inerzia.

Sia Oz il primo asse, $O'A$ il secondo; $O'B$, $O'C$ gli altri due assi principali relativi ad O'; $O'z'$ parallelo ad Oz. Sia $OO' = l$; angolo $BO'z'$ eguale a θ, e sia φ l'angolo

che un piano per ζ forma con un piano fisso. L'energia cinetica del primo corpo è $\frac{1}{2} m k^2 \dot{\varphi}^2$.

Alla rotazione istantanea, di velocità $\dot{\varphi}$, intorno ζ, si può sostituire una rotazione $\dot{\varphi}$ intorno ζ', insieme con una traslazione lungo OO' e di velocità $l\dot{\varphi}$. La velocità intorno ζ' può decomporsi in altre due secondo $O'B$ ed $O'C$ eguali a $\dot{\varphi} \cos\theta$, $\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta$. Finalmente secondo $O'A$ il secondo corpo ha un moto istantaneo di rotazione di velocità $\dot{\theta}$.

L'energia cinetica dovuta al moto di traslazione è $\frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2$; e quella dovuta al moto di rotazione è

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

dove

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\varphi} \cos\theta, \quad r = \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta.$$

Posto

$$A = m_1 a^2, \quad B = m_1 b^2, \quad C = m_1 c^2, \quad \alpha = m k^2 + m_1 (l^2 + c^2)$$
$$\beta = m_1 (b^2 - c^2), \quad \gamma = m_1 a^2,$$

risulta

$$2T = (\alpha + \beta \cos^2\theta)\dot{\varphi}^2 + \gamma\dot{\theta}^2 = h.$$

Inoltre $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = c$, e quindi

$$\gamma\dot{\theta}^2 = h - \frac{c^2}{\alpha + \beta\cos^2\theta}, \text{ ecc.}$$

[THOMSON a. TAIT, l. c., I, pag. 312].

13. In un moto alla POINSOT esprimere, in funzione del tempo, la velocità angolare ω.

Se μ è la componente della velocità angolare lungo OS (fig. 9) avendosi $k\mu = h$, per l'omogeneità delle formule si ponga

$$k = D\mu, \quad h = D\mu^2;$$

D è analoga alle A, B, C. Sia P il punto in cui OH taglia

ellissoide d'inerzia, δ la normale da O sul piano tangente in P ad $\mathfrak{G}$. Abbiamo

$$2T = \mathfrak{J}\omega^2 = \frac{\omega^2}{\overline{OP}^2} = h; \quad \delta : \mu = OP : \omega;$$

onde

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Si trova poi (nelle ipotesi del § 7)

$$A - D > 0, \quad B - D > 0, \quad C - D < 0,$$

ma la somma di due delle A, B, C è sempre maggiore di D.

Risolvendo ora le equazioni

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2, \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2,$$

si trova

$$p^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}(\omega^2 - \alpha^2); \quad \alpha^2 = \mu^2\frac{D(B+C-D)}{BC}; \text{ ecc.}$$

È da notare che

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \mu^2\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(1 - \frac{D}{B}\right) > 0, \text{ ecc.}$$

quindi

$$\gamma^2 < \alpha^2 < \beta^2$$

e però ω^2 è compreso tra α^2 e β^2. Infine essendo

$$\omega\dot{\omega} = p\dot{p} + \ldots = \left(\frac{B-C}{A} + \ldots\right)pqr$$

[per le (24)] si trova

$$\omega\dot{\omega} = \pm\sqrt{-(\omega^2 - \alpha^2)(\omega^2 - \beta^2)(\omega^2 - \gamma^2)},$$

che con una quadratura dà ω^2 in funzione di t.

[Euler, *Theoria motus*, pag. 299. Lagrange, *Méc. Analy.* Œuvres comp. **12**, pag. 234].

14. Trovare l'equazione differenziale della erpoloide in un moto alla Poinsot.

Le coordinate di P, rispetto agli assi d'inerzia siano x, y, z e sia ρ la sua distanza dall'asse OS. Si ha

$$x = \frac{p}{\sqrt{h}} = \frac{p}{\mu\sqrt{D}}; \text{ ecc. } x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \frac{1}{D} = \frac{\omega^2}{\mu^2 D}$$

$$\omega^2 = \mu^2 (D\rho^2 + 1).$$

Calcoliamo

$$\omega^2 - \alpha^2 = \mu^2 D\left(\rho^2 + \frac{1}{D} - \frac{B+C-D}{BC}\right); \text{ ecc.}$$

e poniamo

$$\frac{1}{D} - \frac{B+C-D}{BC} = \frac{(B-D)(C-D)}{BCD} = -a, \text{ ecc.}$$

Risulta $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $a < b$.

Quindi

$$p^2 = \mu^2 D \frac{BC}{(A-B)(A-C)}(\rho^2 - a); \text{ ecc.}$$

però $\rho^2 > a$ e $\rho^2 < b$. Infine

$$\rho\dot{\rho} = \mu\sqrt{D}\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}.$$

L'erpoloide è sempre compresa tra due cerchi di raggi a e b cui risulta tangente.

Rispetto agli assi fissi abbiamo

$$x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z; \quad \mu\sqrt{D}x_1 = a_1 p + a_2 q + a_3 r, \text{ ecc.}$$

Quindi

$$\mu^2 D(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) = (a_1 p + \ldots)(b_1\dot{p} + \ldots)$$
$$-(a_1\dot{p} + \ldots)(b_1 p + \ldots).$$

Il secondo membro è la somma di tre termini che si deducono con permutazioni circolari da

$$c_1(q\dot{r} - \dot{q}r) = \frac{1}{k}Ap^2\left(\frac{A-B}{C}q^2 - \frac{C-A}{B}r^2\right),$$

per le (24) e per i valori di $c_1, \ldots$ (§ 7). Riducendo e tenendo conto delle (25) e (26), risulta

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = \mu\sum\frac{A(A-D)}{(A-B)(A-C)}(\rho^2 - a).$$

Finalmente, osservando le seguenti identità:

$$\sum\frac{A^2}{(A-B)(A-C)} = 1, \quad \sum\frac{A}{(A-B)(A-C)} = 0$$

e posto

$$-\sum \frac{A(A-D)}{(A-B)(A-C)} a = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD} = E$$

si ottiene

$$x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1 = \mu(\rho^2 + E)$$

e se diciamo ψ l'angolo che il raggio vettore fa con una retta fissa, allora

$$\rho^2 \dot{\psi} = \mu(\rho^2 + E);$$

onde finalmente, col valore precedentemente calcolato per $\dot{\rho}$,

$$d\psi = \frac{(\rho^2 + E)\, d\rho}{\rho \sqrt{D} \sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}}$$

equazione differenziale dell'erpoloide.

Nel caso che $Bh - k^2 = 0$ si ha $B = D$, $a = c = E = 0$; onde

$$d\psi = \frac{d\rho}{\rho \sqrt{D} \sqrt{b - \rho^2}};$$

posto $n = \sqrt{b}$; $\sqrt{D} = a$, $\rho = \frac{n}{\mathrm{Ch}\, u}$, otteniamo

$$\rho \,\mathrm{Ch} \frac{n\psi}{a} = n;$$

equazione della *spirale di* POINSOT.

[LORIA, l. c., pag. 588].

15. Dimostrare che il punto P percorre l'erpoloide in guisa che la velocità areale è una funzione lineare di ρ^2; ed il quadrato della velocità totale è una funzione di secondo grado in ρ^2, col coefficiente di ρ^4 negativo.

La prima proprietà risulta subito da

$$\rho^2 \dot{\psi} = \mu(\rho^2 + E).$$

Inoltre

$$\rho^2 v^2 = \rho^2 \dot{\rho}^2 + \rho^4 \dot{\psi}^2,$$

cioè

$$\rho^2 v^2 = -\mu^2 D(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c) + \mu^2 (\rho^2 + E)^2.$$

Il secondo membro ha il termine indipendente da ρ^2 nullo, perchè

$$\mu^2 D a b c + \mu^2 E^2 = 0;$$

però è divisibile per ρ^2 e quindi è vero, ecc.

[DARBOUX, *Notes à la Méc. de Despeyrous,* XVII, XVIII (1884-1886)].

Per altre proprietà cinematiche vedi Vol. 1°, Cap. 5°, Eserc. 23, 24.

È stato provato che l'erpoloide non ha flessi: se poi si considera più generalmente il moto di una quadrica, il cui centro è fisso, su di un piano tangente, i flessi potranno anche esser reali.

[HESS, *Das Rollen u. s. w.* Münich, 1880. Comp. Rend., **102**, p. 1366; 1886. HALPHEN, l. c., **2**, p. 55 e le note di DARBOUX già citate].

16. Determinare il moto nell'ipotesi che inizialmente due componenti della velocità angolare siano molto piccole.

Se per $t = 0$, $q = r = 0$, allora il corpo gira uniformemente intorno asse x; se q ed r sono molto piccole, trascurando il prodotto qr nella prima delle (24) si ha p=cost.$=p_0$. Quindi dalle altre due

$$\ddot{q} = -\frac{(A-C)(A-B)}{BC} p_0^2 q = -n^2 q;$$

onde

$$q = \alpha \cos n t + \beta \operatorname{sen} n t; \quad \dot{q} = -\alpha n \operatorname{sen} n t + \beta n \cos n t$$

e in conseguenza:

$$\alpha = q_0, \quad \beta n = -\frac{A-C}{B} p_0 r_0.$$

Dunque q oscilla tra limiti assai piccoli; e lo stesso dicasi per r.

Dunque il moto è *stabile* intorno l'asse di momento massimo e di momento minimo.

Per quello di momento medio, posto $q = q_0$, si ha

$$\ddot{p} = \frac{(A - C)(A - B)}{AC} q_0^2 p = m^2 p,$$

onde

$$p = \alpha e^{mt} + \beta e^{-mt}$$

e col crescere di t, p può aumentare indefinitamente; il moto è instabile.

[POISSON, *Traité*, etc., **2**, p. 155].

17. Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso e soggetto a forze il cui potenziale è

$$-\frac{1}{2} m k z_1^2 - \varphi(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2),$$

in cui k è costante per tutti i punti.

Le componenti della forza secondo gli assi fissi sono

$$2 x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r^2}, \quad 2 y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r^2}, \quad 2 z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r^2} + m k z_1$$

($r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$); e le componenti del momento

$$m k z_1 y_1, \qquad - m k z_1 x_1, \qquad 0.$$

Le componenti secondo gli assi connessi col corpo, assi principali d'inerzia, sono

$$m k z_1 (a_1 y_1 - b_1 x_1); \text{ ecc.}$$

Ma

$$a_1 y_1 - b_1 x_1 = a_1 (b_1 x + b_2 y + b_3 z) - b_1 (a_1 x + a_2 y + a_3 z) = c_3 y - c_2 z,$$

quindi

$$M_x = k \sum m(c_1 x + c_2 y + c_3 z)(c_3 y - c_2 z) = k(C - B) c_2 c_3 \text{, ecc.}$$

Le equazioni (23) ci dànno adunque

$$A\dot{p} = (B - C)(q r - k c_2 c_3), \text{ ecc.}$$

Esse ammettono i seguenti integrali:

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 + k(A c_1^2 + B c_2^2 + C c_3^2) = h$$

(conservazione dell'energia). Di più, essendo $M_{z_1} = 0$, si ha $R_1 = \text{cost.} = l$, cioè

$$A p c_1 + B q c_2 + C r c_3 = l.$$

Questi due integrali si deducono anche subito dal sistema precedente insieme colle (20). Si deduce pure:

$$A^2 p\dot{p} + \dots + k[A(B - C)c_2 c_3 p + \dots] = 0$$

cioè

$$A^2 p\dot{p} + \dots + k[BC(qc_3 - rc_2)c_1 + \dots] = 0$$

$$A^2 p\dot{p} + \dots - k(BCc_1\dot{c}_1 + \dots) = 0$$

ed integrando

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - k(BCc_1^2 + CAc_2^2 + ABc_3^2) = m,$$

che è un terzo integrale. Il problema si può ricondurre alle quadrature.

[F. de Brun, Académ. d. Sciences de Stockolm, 1893. Kobb. Bull. de la Soc. mathém. de France, **23**, p. 210-215].

18. Un corpo rigido con un punto fisso, soggetto a forze qualsiasi, si muove in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità di ogni elemento.

Le varie resistenze si compongono in una coppia il cui momento è $-\lambda(\mathfrak{M} - O)$: quindi l'equazione (17) ci dà

$$\frac{d(\mathfrak{M} - O)}{dt} + \lambda(\mathfrak{M} - O) = M - O.$$

Moltiplicando per $e^{\lambda t}$ e poscia ponendo

$$e^{\lambda t} dt = dt_1, \quad \mathfrak{M}_1 - O = e^{\lambda t}(\mathfrak{M} - O)$$

otteniamo

$$\frac{d(\mathfrak{M}_1 - O)}{dt_1} = M - O,$$

non abbiamo dunque un problema diverso da quello del § 6; se $M - O = 0$ si può trattarlo in maniera analoga a quella del § 7.

[Padova, Atti R. Acc. Torino, **20** (1885)].

19. Trovare le equazioni del moto, nelle ipo-

tesi del § 6, supponendo il corpo soggetto a forze il cui potenziale è Π.

Il lavoro elementare delle forze $-d\Pi$ è espresso da

$$(M_x p + \ldots) dt$$

od anche, per le (14) del Cap. 5°, Vol. 1°, da:

$$(M_x \cos\varphi - M_y \operatorname{sen}\varphi) d\theta$$
$$+ [(M_x \operatorname{sen}\varphi + M_y \cos\varphi) \operatorname{sen}\theta + M_z \cos\theta] d\psi + M_z d\varphi.$$

Di qui si ricava agevolmente

$$M_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\cos\varphi - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} - \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\cos\theta\right)$$
$$M_y = \frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\operatorname{sen}\varphi - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} - \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\cos\theta\right)$$
$$M_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}.$$

Sostituiremo questi valori nelle (23).

Le equazioni ammettono l'integrale della conservazione dell'energia:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2\Pi = h.$$

Osserviamo poi che

$$M_{z_1} = c_1 M_x + c_2 M_y + c_3 M_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi},$$

per i valori di c_1, c_2, c_3 (Vol. 1°, pag. 74).

Se quindi Π non dipende da ψ, avremo $R_1 = \text{cost.}$ come nel § 8,

$$Apc_1 + Bqc_2 + Crc_3 = \text{cost.};$$

e ciò ha luogo nel caso del corpo pesante.

Se Π non dipende che da $c_3 = \cos\theta$ e l'ellissoide è di rotazione intorno z, allora abbiamo un terzo integrale $r = n$. Il caso di LAGRANGE rientra in questo (§ 8). Si ha allora dal primo integrale

$$p^2 + q^2 = \beta[\gamma - \Pi(c_3)]$$

e dal secondo

$$pc_1 + qc_2 = \delta - \alpha c_3, \quad \left(\alpha = \frac{Cn}{A}\right).$$

E poichè

$$\dot{c}_3^2 = (q c_2 - p c_1)^2 = (p^2 + q^2)(c_1^2 + c_2^2) - (p c_1 + q c_2)^2$$

si trova

$$\dot{c}_3^2 = \beta[\gamma - \Pi(c_3)](1 - c_3^2) - (\delta - \alpha c_3)^2.$$

Il problema si riconduce alle quadrature. Il caso in cui $\Pi \equiv \cos^2\theta$ conduce a funzioni ellittiche ed è importante per l'astronomia.

[TISSERAND, Comp. Rend. **101** (1885). PADOVA, Rend. Acc. Lincei, febbraio 1886]. È notevole la seguente proprietà del moto.

Si ha

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = p^2 + q^2 + r^2 = m + n\Pi(c_3)$$

ma $$r_1 = p c_1 + q c_2 + r c_3$$

onde $$c_3 = m_1 r_1 + n_1$$

quindi

$$p_1^2 + q_1^2 = n\Pi(m_1 r_1 + n_1) + m - r_1^2 = \varphi(r_1);$$

l'erpoloide giace su di una superficie di rotazione intorno all'asse fisso.

Il moto del corpo si può riprodurre facendo rotolare la poloide su questa superficie, la velocità di rotolamento essendo eguale al raggio.

Nel caso di LAGRANGE tale superficie è una sfera.

Se $\Pi = \alpha c_3^2 + \beta c_3$ è una quadrica, ecc.

[DARBOUX, J. de Liouville, **1** (4), 1885. PALADINI, Rend. Acc. Lincei 1888. URZÍ, Giorn. di Napoli **5** (2). DARBOUX, Note XX già citata ed una mia nota: Annali di Matem. **7** (3), 1902. Nella monografia del sig. DOMOGAROFF (Pietroburgo 1893) vi è una larghissima rassegna bibliografica del soggetto].

20. Discutere il caso di LAGRANGE nell'ipotesi che il corpo ruoti inizialmente intorno l'asse di figura, con velocità grandissima.

Essendo $A=B$, $\xi=\eta=0$ e inoltre per $t=0$, $p=q=0$, si ha $r=n$ e i due integrali (30) e (31) diventano rispettivamente

$$p c_1 + q c_2 = \text{sen}^2\theta . \dot\psi = \alpha(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$p^2 + q^2 = \frac{2\mu\zeta}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

in cui θ_0 è il valore iniziale di θ, cioè dell'angolo dei due assi z, z_1. Procedendo come nell'esercizio precedente, otteniamo

$$\dot c_3^2 = (\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[\frac{2\mu\zeta}{A}(1-\cos^2\theta) - \alpha^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right].$$

Supporremo n e quindi $\alpha > 0$; allora se $\zeta > 0$ sarà pure $\theta_0 < \theta$, $\dot\psi > 0$; in tal caso il fattore di secondo grado in $\cos\theta$, diventa positivo per $\theta=\theta_0$ e negativo per $\cos\theta = -1$ e però si annulla per un valore $\theta_1 > \theta_0$. Quindi θ oscilla periodicamente tra i due valori θ_0 e θ_1, e raggiunge quest'ultimo dopo un tempo finito. L'angolo ψ è l'angolo che la traccia ON, nodale del piano equatoriale col piano xy, forma con x_1; quindi $\dot\psi$ ha lo stesso segno di n se $\theta > \theta_0$; e segno contrario se $\theta < \theta_0$.

La curva descritta dalla proiezione del centro di massa sul piano orizzontale $x_1\, y_1$, ha per coordinate polari $\rho = \zeta \,\text{sen}\,\theta$ e ψ. Essa è quindi sempre compresa tra due cerchi di raggi $\zeta \,\text{sen}\,\theta_1$ e $\zeta\,\text{sen}\,\theta_0$.

Si trova subito inoltre che $\frac{d\rho}{d\psi}$ è nullo per $\theta = \theta_1$ ed è infinito per $\theta = \theta_0$; tale curva è dunque tangente al primo cerchio e normale al secondo.

[La discussione completa di questo caso è stata fatta da HESS: Mathem. Ann., **19**; e quella del caso delle condizioni qualunque pure dallo stesso: ibidem., **29** (1887)].

Se n è molto grande, o più in generale se $\frac{\mu\zeta}{A\alpha^2} = \frac{\mu\zeta A}{C^2 n^2}$

è assai piccolo, θ si mantiene sempre molto prossimo a θ_0; poniamo $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ e trascuriamo i termini in ε^2; si ha
$\cos\theta = c_3 = \cos\theta_0 - \varepsilon \operatorname{sen}\theta_0$, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0$,

$$\operatorname{sen}^2\theta_0 \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = \alpha^2 \varepsilon \operatorname{sen}\theta_0 [2\varepsilon_1 \operatorname{sen}\theta_0 - \varepsilon \operatorname{sen}\theta_0]$$

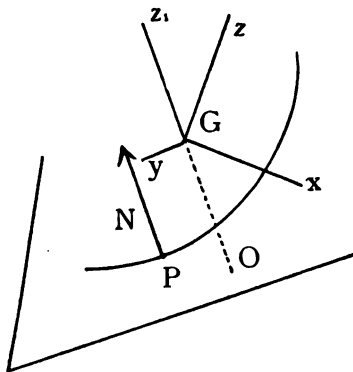
con
$$\varepsilon_1 = \frac{\mu\zeta A}{C^2 n^2} \operatorname{sen}\theta_0;$$
quindi
$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \cos\alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \cos\alpha t$$
e successivamente
$$\dot\psi = \frac{\alpha(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\theta_0}\varepsilon = \frac{\alpha\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\theta_0} - \frac{\alpha\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\theta_0}\cos\alpha t$$
donde
$$\psi = \frac{\alpha\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\theta_0} t - \frac{\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\theta_0} \operatorname{sen}\alpha t.$$

L'angolo θ è una funzione periodica di t col periodo $\frac{2\pi}{\alpha}$; il valore massimo di θ è $\theta_0 + 2\varepsilon_1$ per $t = \frac{\pi}{\alpha}$; l'asse di figura quindi oscilla intorno alla sua posizione iniziale (o ad una posizione media) e in virtù di questo movimento, che dicesi appunto *nutazione*, il piano equatoriale si avvicina ed allontana dalla verticale e dopo il tempo $\frac{2\pi}{\alpha}$ riprende la stessa posizione. Il moto della nodale ON sul piano $x_1\, y_1$ non è periodico e dopo un tempo $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'angolo ψ non è tornato a zero, ma si sarà invece spostato nel senso positivo di $\frac{2\pi\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\theta_0}$; un tal spostamento dicesi *precessione* e il moto di ON dicesi appunto di precessione.

Perchè la ON torni ad assumere il valor iniziale, zero, occorre che $2\pi = \frac{\alpha\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\theta_0} t$; cioè deve trascorrere un tempo $\frac{2\pi}{\alpha}\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\varepsilon_1}$ (periodo di precessione). Se θ_0 non è molto

piccolo, essendo ε_1 assai piccolo, il periodo di precessione è assai più grande di quello di nutazione.

Si vedono subito le modificazioni da introdurre per $\zeta < 0$; i risultati in tal caso, qualitativamente, collimano coi fenomeni di nutazione e precessione della terra.

21. Moto di un corpo rigido pesante su di un piano orizzontale levigato.

(*Fig. 12*)

Sia (Fig. 12) G il centro di massa; l'asse ζ_1 normale al piano, P punto di contatto, N reazione normale, x, y, z assi centrali d'inerzia. Fissata la posizione di questi rispetto ζ_1, fissati cioè c_1, c_2, c_3 e quindi θ e φ, è pure fissata l'altezza ζ di G dal piano, cioè

$$\zeta = f(\theta, \varphi).$$

Si ha un sistema con cinque gradi di libertà.

Poichè $R_{x_1} = R_{y_1} = 0$ sussistono gl'integrali del centro di massa secondo x_1 ed y_1 (Cap. 4°, § 7): però O si muove di moto rettilineo ed uniforme.

Il lavoro di N essendo nullo sussiste l'integrale della conservazione energia

$$\mu(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2\mu g\zeta = \text{cost.}$$

$(\mu = \sum m)$; ma $\dot\xi^2 + \dot\eta^2 = \text{cost.}$: onde

$$\mu\dot\zeta^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h - 2\mu g\zeta.$$

Ancora è $M_{\zeta_1} = 0$ e però

$$A p c_1 + B q c_2 + C r c_3 = k.$$

E questi sono i soli integrali noti nel caso generale.

Se l'ellissoide d'inerzia è di rivoluzione intorno z e la superficie del corpo è di rotazione, N incontra z; quindi $R_z = 0$ e però $R = \text{cost.}$, cioè $r = \text{cost.} = n$. Inoltre $\zeta = f(\theta) = \varphi(c_3)$. Si può ricondurre il problema alle quadrature come nell'esercizio precedente.

Nel caso della trottola il corpo poggia per una punta:

$$\zeta = l \cos\theta = l c_3$$

ed abbiamo lo stesso problema.

Nel caso di un disco invece $\zeta = l \operatorname{sen}\theta = l\sqrt{1 - c_3^2}$.

[Poisson, *Traité*, etc. **2**, p. 214. Jullien, l. c., **2**, p. 186. Appell, l. c. **2**, p. 270. Padova, Atti R. Ist. Veneto **6** (7), (1894-1895)].

22. L'asse di simmetria di un corpo solido pesante ed omogeneo ha un punto fisso O e scorre su di un cerchio fisso levigato orizzontale, il cui centro sta sulla verticale di O. Determinare il moto.

L'integrale della conservazione di energia è

$$A p^2 + \dots + 2 \mu g \zeta_1 = \text{cost.};$$

ma

$$\zeta_1 = OG \cos\theta = \zeta \cos\theta = \text{cost.};$$

onde

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = h.$$

Inoltre

$$A p c_1 + B q c_2 + C r c_3 = \text{cost.}$$

$$c_1 = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad c_2 = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad c_3 = \cos\theta = \text{cost.}$$

e però

$$p = \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad q = \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}.$$

Il problema si riduce alle quadrature.

[Painlevé, *Leçons sur l'intégr. des équations de la Méc.* Paris (1895), p. 32].

23. Moto di un corpo rigido pesante che rotola e gira su di un piano (o superficie).

In ogni istante il moto del corpo si riduce ad una rotazione intorno ad un asse uscente dal punto di contatto che in quell'istante hanno il corpo e la superficie. Questa rotazione istantanea può decomporsi in una normale alle due superficie (velocità di rotazione propria) ed in un'altra secondo il piano tangente (velocità di rotolamento). Se anche la seconda superficie è mobile (di moto prestabilito) allora il corpo si manterrà sempre a contatto con questa e la velocità del punto del contorno e del punto della superficie che funge da punto di contatto saranno sempre eguali.

Nel primo caso il vincolo imposto si traduce nel fatto che la velocità del punto di contatto è nulla e dà luogo ad una relazione differenziale non integrabile (Vol. 1°, pag. 211); si ha dunque un sistema anolonomo.

Riferiamoci agli assi d'inerzia centrali; sia P il punto di contatto del corpo e del piano che supporremo orizzontale; α, β, γ i coseni (rispetto assi x, y, z) della normale in P positiva verso l'alto. Se è data l'equazione della superficie α, β, γ sono funzioni note di x, y, z; siano X, Y, Z le componenti della reazione in P. Avremo

$$R_x = -\mu g \alpha + X, \text{ ecc.}; \quad M_x = Zy - Yz; \text{ ecc.}$$

e le equazioni (35) ci dànno

$$\mu(\dot{u} + qw - rv) = -\mu g \alpha + X, \text{ ecc.}$$
$$A\dot{p} + (C - B)qr = Zy - Yz, \text{ ecc.}$$

Ora dobbiamo esprimere che la velocità di P è nulla; cioè

$$u + qz - ry = 0; \text{ ecc.}$$

e che inoltre la direzione α, β, γ è fissa nello spazio.

Conduco per G un segmento $GO = 1$ parallelo ad α, β, γ; il punto O ha una velocità assoluta eguale a quella di G; onde

$$\dot{\alpha} + u + q\gamma - r\beta = u;$$

cioè

$$\dot{\alpha} + q\gamma - r\beta = 0; \text{ ecc.}$$

Abbiamo 12 equazioni con altrettante incognite ($u, \ldots p, \ldots, x, \ldots X, \ldots$). Si deduce subito che

$$\mu(u\dot{u} + \ldots) + Ap\dot{p} + \ldots = -\mu g(\alpha u + \ldots) \\ + X(u + q z - r y) + \ldots.$$

Ma

$$\alpha u + \ldots = x(q\gamma - r\beta) + \ldots = -(\dot{\alpha} x + \ldots)$$

ed essendo

$$\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z} = 0$$

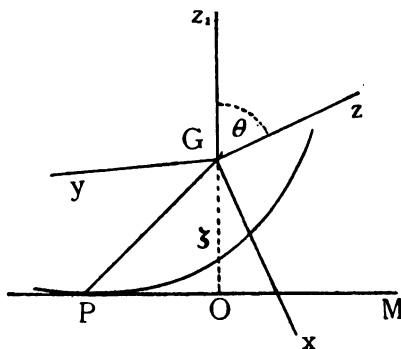
risulta

$$\mu(u\dot{u} + \ldots) + Ap\dot{p} + \ldots = \mu g \frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

che dà un integrale (conservazione energia).

[APPELL, *Les mouv. de roulement*, pag. 25].

24. Lo stesso problema supponendo il corpo di rotazione.

Conserviamo le stesse notazioni dell'esercizio 21 (Fig. 13) e l'asse x sia un asse fisso del piano meridiano; ma non fisso nel corpo e sia PM intersezione del piano orizzontale con piano PGz. Si ha

$$\zeta = f(\theta);$$

poscia cerchiamo le componenti della velocità istantanea di rotazione della terna x, y, z. Sia ψ l'angolo che y forma con una retta del piano orizzontale:

(*Fig. 13*)

e però abbiamo una rotazione di velocità angolare $\dot{\psi}$ intorno z_1, ed una di velocità $\dot{\theta}$ intorno y; quindi (§ 9)

$$p' = -\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \quad q' = \dot{\theta}, \quad r' = \dot{\psi} \cos \theta.$$

Abbiamo infine una rotazione del corpo intorno z; e se φ è l'angolo che x forma con una retta del corpo, la velocità di rotazione è $\dot{\varphi}$ intorno z; onde

$$p = p', \quad q = q', \quad r = r' + \dot{\varphi},$$

e le equazioni (35) e (36), tenuto calcolo di quelle dell'esercizio precedente e di $A = B$, diventano:

$$\mu(\dot{u} + q w - r' v) = \mu g \operatorname{sen} \theta + X; \quad \mu(\dot{v} + r' u - p w) = Y$$

$$\mu(\dot{w} + p v - q u) = -\mu g \cos \theta + Z$$

$$A\dot{p} + (Cr - Ar')q = -z Y$$

$$A\dot{q} - (Cr - Ar')p = z X - x Z$$

$$C\dot{r} \qquad = x Y.$$

La velocità di P è nulla: onde

$$u + q z = 0, \quad v + r x - p z = 0, \quad w - q x = 0;$$

ed abbiamo nove equazioni tra cui occorre eliminare u, v, w, X, Y, Z: risultano tre equazioni differenziali del secondo ordine.

Si può verificare subito che ha luogo l'integrale della conservazione dell'energia. Infatti

$$\mu(u\dot{u} + \ldots) + A(p\dot{p} + q\dot{q}) + C r\dot{r} = \mu g (u \operatorname{sen} \theta - w \cos \theta);$$

d'altra parte

$$u \operatorname{sen}\theta - w \cos\theta = -(z \operatorname{sen}\theta + x \cos\theta) q = -(x \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta)\dot{\theta}.$$

Ma l'equazione di PM è

$$x \operatorname{sen} \theta - z \cos \theta = \zeta = f(\theta)$$

e la curva meridiana, che è l'inviluppo di PM, ci dà

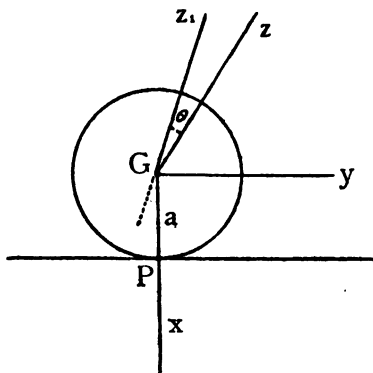
$$x \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta = \frac{d\zeta}{d\theta}$$

quindi il secondo membro della equazione superiore è

$$-\mu g \frac{d\zeta}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{d}{dt}(\mu g \zeta), \text{ ecc.}$$

[Appell, l. c., pag. 27; Routh, *Advanced part,* etc. (1884)].

25. Trattare il caso particolare che il corpo si riduce ad un cerchio omogeneo di massa uno e di raggio a.

Le coordinate di P sono $(a, 0, 0)$ (Fig. 14). Inoltre

(Fig. 14)

$A = B = \frac{1}{2} a^2$, $C = a^2$ e le equazioni precedenti ci dànno:

$$u = 0, \quad v + ar = 0, \quad w - aq = 0$$

$$a(q^2 + rr') = g \operatorname{sen}\theta + X, \quad -a\dot{r} - apq = Y, \quad a\dot{q} - apr = -g\cos\theta + Z$$

$$\frac{1}{2} a^2 \dot{p} + a^2\left(r - \frac{1}{2} r'\right) q = 0, \quad \frac{1}{2} a^2 \dot{q} - a^2\left(r - \frac{1}{2} r'\right) p = -aZ$$

$$a^2 \dot{r} = aY,$$

dalle ultime abbiamo già eliminato le u, v, w; eliminiamo ora le X, Y, Z. Si ha:

$$\frac{1}{2} \dot{p} + \left(r - \frac{1}{2} r'\right) q = 0, \quad \frac{3}{2} \dot{q} - \left(2r - \frac{1}{2} r'\right) p = -\frac{g}{a} \cos\theta,$$

$$2\dot{r} + pq = 0.$$

Ma (esercizio 24)

$$p = p' = -\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \quad q = q' = \dot{\theta}, \quad r' = \dot{\psi} \cos \theta;$$

quindi

$$r' = -p \operatorname{cotg} \theta$$

e infine

$$\dot{p} + (2r + p\operatorname{cotg}\theta)\dot{\theta} = 0, \quad 3\ddot{\theta} - (4r + p\operatorname{cotg}\theta)p = -\frac{2g}{a}\cos\theta$$

$$2\dot{r} + p\dot{\theta} = 0,$$

che sono appunto tre equazioni differenziali tra p, r, θ.

Moltiplicando per p, $\dot{\theta}$, $2r$ e sommando si ha

$$p\dot{p} + 3\dot{\theta}\ddot{\theta} + 4r\dot{r} = -\frac{2g}{a}\dot{\theta}\cos\theta$$

ed integrando

$$p^2 + 4r^2 + 3\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{a}\operatorname{sen}\theta + h.$$

Si possono riguardare p, r come funzioni di θ; allora la prima e terza ci dànno

$$\frac{dp}{d\theta} + 2r + p\operatorname{cotg}\theta = 0, \quad 2\frac{dr}{d\theta} + p = 0.$$

Da questa seconda: $p = -2\dfrac{dr}{d\theta}$; eliminando p si ottiene

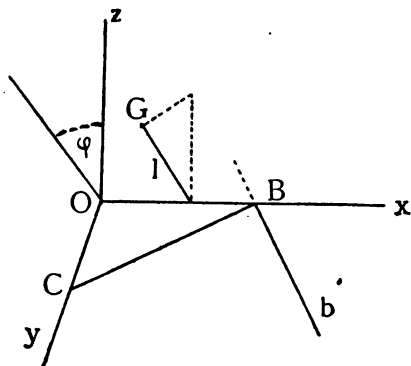
$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{dr}{d\theta} - r = 0$$

che si integra colla serie ipergeometrica; poscia è subito trovato p e quindi $\dot{\theta}$; ecc.

[APPELL, l. c., pag. 34; Rend. Circ. Mat. di Palermo, **14** (1900); KORTEWEG, ibidem; CARVALLO, *Théorie du mouv. du monocycle et de la bicyclette*, J. de l'Éc. Polytechnique, Cah. **5**, **6** (2), (1900)].

26. Problema della bicicletta.

In prima approssimazione riguardiamo la bicicletta come un sistema rigido, simmetrico rispetto ad un piano passante

per una retta OB di un piano orizzontale (Fig. 15); O è il punto di contatto colla ruota fissa; B con la direttrice e quindi OB è la tangente alla traiettoria di O; sia Bb la tangente a quella di B. La distanza OB è costante e il moto di O uniforme. Si trova subito il centro istantaneo di rotazione C; la velocità angolare costante è $\omega = \frac{v}{R}$; v essendo quella di O e $R = OC$. Sia OB asse x, OC asse y e la verticale di O, verso l'alto, l'asse z. Il piano Gx (G centro di massa) formi con zx l'angolo φ. Applicheremo il teorema della conservazione dell'energia a questo problema di moto relativo.

(*Fig. 15*).

L'energia cinetica del corpo è espressa da $\frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2$, A momento d'inerzia del corpo secondo x. L'energia potenziale dovuta alle forze esterne (peso) è $\mu g \zeta = \mu g l \cos \varphi$; l'energia dovuta alle forze di strascinamento è quella dovuta alle forze centrifughe; non dobbiamo considerare quella dovuta alle forze centrifughe composte (Cap. 2°, § 7). Le componenti della forza centrifuga per una massa $m(x, y, z)$ sono $m\omega^2 x$, $m\omega^2 (y - R)$, o, ed il lavoro è

$$m\omega^2 (y - R) dy$$

cioè, se $y = r \operatorname{sen} \varphi$ (r distanza da x),

$$m\omega^2 r (r \operatorname{sen} \varphi - R) \cos \varphi \, d\varphi.$$

Il lavoro complessivo di tutte queste forze è

$$A\omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\varphi - \mu l R \omega^2 \cos\varphi\, d\varphi,$$

perchè

$$A = \sum m r^2, \qquad \mu l = \sum m r.$$

Tale lavoro è la derivata esatta, rispetto φ, di

$$-\frac{1}{4}\omega^2 A \cos 2\varphi - \omega^2 \mu l R \operatorname{sen}\varphi;$$

dunque il potenziale delle forze centrifughe è

$$\frac{1}{4}\omega^2 A \cos 2\varphi + \omega^2 \mu l R \operatorname{sen}\varphi.$$

L'integrale della conservazione di energia è

$$\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2 + \mu g l \cos\varphi + \frac{1}{4}\omega^2 A \cos 2\varphi + \omega^2 \mu l R \operatorname{sen}\varphi = h,$$

da cui si deduce

$$A\ddot{\varphi} = \mu g l \operatorname{sen}\varphi - \omega^2(\mu R l - A \operatorname{sen}\varphi)\cos\varphi,$$

che avremmo potuto stabilire direttamente.

Nel caso dell'equilibrio avremo

$$\mu g l \operatorname{sen}\varphi - \omega^2(\mu R l - A \operatorname{sen}\varphi)\cos\varphi = 0$$

donde

$$\omega^2 = \frac{\mu g l}{\mu R l - A \operatorname{sen}\varphi} \operatorname{tang}\varphi.$$

Se φ è molto piccolo, trascurando $A \operatorname{sen}\varphi$, si ha

$$\omega^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{g}{R}\operatorname{tang}\varphi; \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{v^2}{Rg}.$$

Per uno stesso v, al crescere di φ deve diminuire R, cioè bisogna accostare C e quindi piegare il manubrio dalla parte in cui inclina la macchina. Il valore di φ precedentemente trovato annulla la derivata dell'energia cinetica. La derivata seconda è

$$\mu g l \cos\varphi + \omega^2 \mu R l \operatorname{sen}\varphi$$

(avendo ancora trascurato $A \operatorname{sen}\varphi$); e quindi per φ molto piccolo è positiva.

Abbiamo dunque un minimo per l'energia. La posizione verticale è di equilibrio instabile.

[Bourlet, *Traité des bicycles et des bicyclettes*, Paris (1894); Appell, *Traité de Méc.*, **2**, pag. 297 e *Les mouvem.* etc., pag. 36; Maggi, l. c., pag. 128].

27. Problema della palla da bigliardo..

Una sfera omogenea pesante è, all'istante t, a contatto in C con un piano orizzontale xy e soggetta al proprio peso μg. La reazione del piano è una forza applicata in C; ma, a causa dell'attrito del piano, non è normale allo stesso e si decompone in una reazione normale N ed in una tangenziale F (attrito radente) in direzione contraria alla velocità assoluta di C, indipendente da questa velocità e proporzionale alla reazione normale; cioè $F = fN$.

(Leggi dell'attrito radente nel moto).

Le equazioni del moto del centro di massa (ξ, η, $\zeta = a$) sono

$$\mu\ddot{\xi} = F_x, \quad \mu\ddot{\eta} = F_y, \quad \mu\ddot{\zeta} = -\mu g + N = 0,$$

donde $N = \mu g$. Le equazioni del moto intorno O (centro sfera), ricordando che rispetto ad ogni retta uscente da O il momento d'inerzia è $\frac{2}{5}\mu a^2$ (eserc. 1), sono

$$\frac{2}{5}\mu a^2 \dot{p} = aF_y, \quad \frac{2}{5}\mu a^2 \dot{q} = -aF_x, \quad \dot{r} = 0.$$

La velocità assoluta di C ha per componenti

$$\dot{\xi} - qa, \quad \dot{\eta} + pa, \quad 0;$$

quindi posto

$$V^2 = (\dot{\xi} - qa)^2 + (\dot{\eta} + pa)^2,$$

abbiamo, per le ammesse leggi,

$$F_x = -f\mu g\frac{\dot{\xi} - qa}{V}, \quad F_y = -f\mu g\frac{\dot{\eta} + pa}{V}.$$

Otteniamo dunque le seguenti equazioni

$$\ddot{\xi} = -fg\frac{\dot{\xi} - qa}{V}, \quad \ddot{\eta} = -fg\frac{\dot{\eta} + pa}{V}$$

$$\frac{2}{5}a\dot{p} = \ddot{\eta}, \quad \frac{2}{5}a\dot{q} = -\ddot{\xi}, \quad \dot{r} = 0.$$

Da queste ultime, con una integrazione si ha

$$p = \frac{5}{2a}\dot{\eta} + \text{cost.}, \qquad q = -\frac{5}{2a}\dot{\xi} + \text{cost.};$$

quindi è

$$\dot{\xi} - aq = \tfrac{7}{2}(\dot{\xi} - \alpha); \qquad \dot{\eta} + ap = \tfrac{7}{2}(\dot{\eta} - \beta)$$

con α e β costanti; e le due prime diventano

$$V\ddot{\xi} = -\tfrac{7}{2}fg(\dot{\xi} - \alpha), \qquad V\ddot{\eta} = -\tfrac{7}{2}fg(\dot{\eta} - \beta)$$

cioè

$$\frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi} - \alpha} = \frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta} - \beta}$$

ed integrando

$$\frac{\dot{\xi} - \alpha}{\dot{\eta} - \beta} = \text{cost.} = \frac{\dot{\xi}_0 - \alpha}{\dot{\eta}_0 - \beta}.$$

Si deduce che $F_x : F_y = \text{cost.}$; la forza F è costante in grandezza e direzione, la velocità di C ha una direzione fissa ed il moto di O è parabolico nel piano $\zeta = a$. Avendosi

$$\frac{\dot{\xi} - \alpha}{\dot{\xi}_0 - \alpha} = \frac{\dot{\eta} - \beta}{\dot{\eta}_0 - \beta} = \frac{V}{V_0}$$

si deduce

$$\ddot{\xi} = -fg\frac{\dot{\xi}_0 - \alpha}{V_0};$$

e quindi

$$\xi - \xi_0 = \dot{\xi}_0 t - \frac{1}{2}fg\frac{\dot{\xi}_0 - \alpha}{V_0}t^2$$

e una espressione analoga per η. Poscia ricaveremo p, q.

Quando $\dot{\xi} = \alpha$, $\dot{\eta} = \beta$ la velocità di C è nulla e lo diviene dopo un tempo $t = V_0 : \mu g$. A partire da questo istante non vi ha più scivolamento, ma rotolamento della sfera. Varranno le equazioni

$$\tfrac{2}{5}a\dot{p} = \ddot{\eta}, \qquad \tfrac{2}{5}a\dot{q} = -\ddot{\xi}, \qquad \dot{r} = 0$$

e quelle che esprimono che la velocità di C è nulla cioè

$$\dot{\xi} - aq = 0, \qquad \dot{\eta} + pa = 0$$

onde $\ddot{\xi} = \ddot{\eta} = 0$; il moto di O è rettilineo ed uniforme.

[POISSON, *Traité*, etc., **2**, pag. 251. APPELL, l. c., **2**, pagina 274, MAGGI, l. c., pag. 134. JULLIEN, l. c., **2**, pag. 192].

CAPITOLO SESTO.

ATTRAZIONE DEGLI ELLISSOIDI E TEOREMI GENERALI SULLA FUNZIONE POTENZIALE NEWTONIANA.

§ 1. **Richiami sulla funzione potenziale.**—Nel Cap. 4°, § 2 abbiamo definito il potenziale di un sistema di masse soggette alla legge universale di attrazione; e, detta f la costante di GAUSS (Capitolo 2°, § 2), si trovò

$$V = f \sum \frac{m}{r} \, *$$

in un punto qualunque P (in cui si ha la massa uno) e dove r è la distanza di P da m. Le derivate, negative, di V rispetto alle coordinate di P, sono le componenti dell'attrazione; il cui calcolo è quindi ricondotto a quello della sola funzione V.

Se V_1 è il valore della funzione potenziale in

* La considerazione di questa funzione è dovuta a LAGRANGE (Mém. Ac. de Berlin, 1777).

P_1, $V - V_1$ è il lavoro compiuto dalle forze per portare l'unità di massa da P in P_1; esso è indipendente dalla traiettoria percorsa.

Se P e P_1 sono assai prossimi e diciamo F_s la forza in P lungo la $PP_1 = s$ (sensibilmente costante da P in P_1) si ha

$$F_s \cdot PP_1 = V - V_1$$

e quindi al limite

$$F_s = -\frac{dV}{ds}.$$

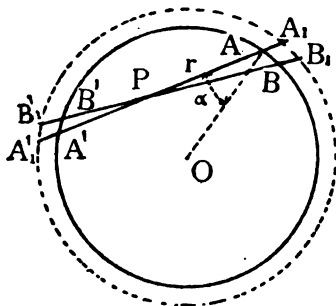
Le superficie $V = \text{cost.}$ sono normali alla direzione della forza e diconsi *equipotenziali;* un punto su queste, supposte liscie, vi sarebbe sempre in equilibrio: però diconsi *superficie d'equilibrio* e finalmente anche di *livello* (Cap. 7°, § 2). Le loro traiettorie ortogonali si dicono *linee di forza.*

Se le masse m sono distribuite con continuità in un volume τ e si dice k la densità in un punto generico, avremo

$$V = \int \frac{k\, d\tau}{r},$$

in cui si è supposto $f = 1$, come ora faremo sempre.

§ 2. **Attrazione di uno strato sferico.**—Consideriamo uno strato sferico omogeneo infinitamente sottile ed il punto potenziato P sia nell'interno della sfera minore (Fig. 16); con vertice in P tracciamo due coni infinitesimi ed opposti che distaccheranno dallo strato due volumi ABA_1B_1, ecc.;

ciascuno di questi ha per misura il prodotto dell'area AB per AA_1. Se diciamo $d\omega$ e $d\sigma$ le aree

(Fig. 16)

distaccate dal cono su due sfere di centro P e raggi eguali ad 1 ed r, si ha

$$d\sigma = \text{area } AB \,.\cos\alpha = r^2 d\omega$$

onde

$$\text{area } AB = \frac{r^2 d\omega}{\cos\alpha}.$$

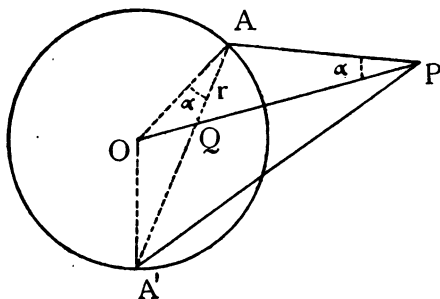
Però l'attrazione che P risente dall'elemento ABA_1B_1, diretta secondo PA, è eguale (supposta eguale ad uno la densità) a $\dfrac{d\omega}{\cos\alpha} AA_1$; la stessa attrazione, ma opposta, risente dall'elemento $A'B'A'_1B'_1$; perchè $AA_1 = A'A'_1$; dunque P non risente alcuna azione dallo strato; la forza è nulla ed il potenziale è costante.

La stessa cosa vale per uno strato di gros-

sezza qualunque, omogeneo oppure omogeneamente stratificato *.

Se le sfere che limitano lo strato omogeneo hanno i raggi $a_1 < a_2$ e diciamo e' lo spazio interno alla sfera a_1, sarà $V_{e'} =$ cost. Basterà dunque assegnarne il valore nel centro, cioè

$$V_{e'} = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\omega} r\,dr\,d\omega = 2\pi(a_2^2 - a_1^2).$$

Supponiamo ora il punto P esterno e lo strato ancora infinitesimo. Da A nel piano OAP, traccio una retta AA' tale che (Fig. 17)

(Fig. 17)

$$\text{ang. } OAQ = \alpha = \text{ang. } APO;$$

sarà pure $A'PO = \alpha$, e

$$AQ : AP = OA : OP.$$

Le attrazioni di due elementi in A e A', distaccati

* NEWTON, l. c., p. 173, Prop. LXX.

dallo strato da un cono infinitesimo avente il vertice in Q, sono entrambe eguali a

$$\delta \frac{\overline{AQ}^2 \, d\omega}{\overline{AP}^2 \cos\alpha} = \delta \frac{a^2 \, d\omega}{\overline{OP}^2 \cos\alpha},$$

in cui δ è lo spessore dello strato; composte, dànno luogo ad una forza d'intensità $\frac{2a^2 d\omega}{\overline{OP}^2}\delta$, diretta secondo OP. La somma di tutte le forze analoghe è dunque una forza secondo OP ed eguale a $\frac{4\pi a^2}{\overline{OP}^2}\delta$. Ma questa è la forza con cui una massa eguale alla massa dello strato e posta in O attrae P: dunque

Uno strato sferico omogeneo, o stratificato omogeneamente, esercita su di un punto esterno una attrazione identica a quella di una massa eguale posta nel centro *.

Se diciamo e lo spazio esterno alla sfera di raggio a_2 di uno strato omogeneo, si ha subito

$$V_e = \frac{4}{3} \frac{\pi(a_2^3 - a_1^3)}{r};$$

le superficie equipotenziali sono sfere concentriche.

Se finalmente il punto P è nello spazio i compreso tra le due sfere, e quindi interno allo

* NEWTON, l. c., pag. 174, Prop. LXXI; THOMSON a. TAIT, l. c., 2, pag. 14.

strato a_2, r, ed esterno ad r, a_1, abbiamo

$$V_i = 2\pi(a_2^2 - r^2) + \frac{4}{3}\frac{\pi(r^3 - a_1^3)}{r}.$$

Nel caso di una sfera omogenea, posto $a_1 = 0$, $a_2 = a$, si ha

$$V_e = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}, \quad V_i = \frac{2\pi}{3}(3a^2 - r^2).$$

La V è continua in tutto lo spazio, e anche per $r = a$; si annulla all'infinito in modo che rV ha per limite la massa della sfera.

Posto $V = \frac{2\pi a}{3} y$; $x = r$, all'interno ed all'esterno la funzione potenziale è rappresentata rispettivamente dalle due curve (Fig. 18)

$$ay = 3a^2 - x^2, \quad y = \frac{2a^2}{x},$$

cioè da una parabola e da una iperbole equilatera che si raccordano nel punto $P(a, 2a)$. Le derivate di V rispetto ad r si rappresentano colle

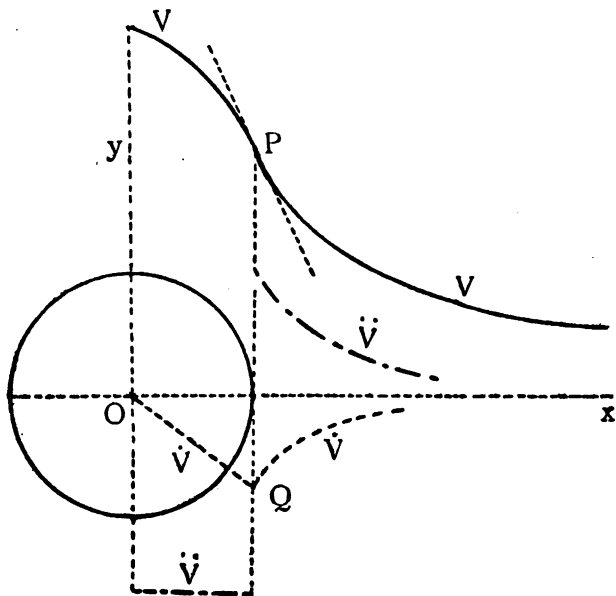
$$ay + 2x = 0, \quad x^2 y = -2a^2,$$

aventi ancora a comune il punto $Q(a, -2)$, ma senza avere la tangente comune. Le derivate di V sono continue dovunque.

Finalmente lo studio delle derivate seconde rispetto ad r, conduce a considerare le due curve

$$ay + 2 = 0, \quad x^3 y = 4a^3$$

che non hanno più a comune il punto per cui

$x = a$; cioè per $x = a$ vi ha discontinuità nelle derivate seconde.

(*Fig. 18*)

Queste proprietà valgono assai più in generale *.

§ 3. **Attrazione di un omoeoide elementare**

---

* Vedi la mia *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici.* Manuali Hoepli, (1904), Cap. 2°. Il diagramma di V e sue derivate per l'involucro sferico omogeneo è in THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, pag. 37.

omogeneo. — Uno strato infinitamente sottile omogeneo compreso tra due ellissoidi concentrici, simili e similmente posti è detto da THOMSON *omoeoide elementare* *.

Ripetendo la stessa dimostrazione del precedente § (essendo sempre $AB = A_1 B_1$) si deduce che un omoeoide elementare non esercita azione su di un punto interno **; la funzione potenziale è quindi costante ed il suo valore è eguale a quello che assume nel centro. Lo stesso vale per un qualunque omoeoide omogeneo, oppure decomponibile in omoeoidi elementari omogenei.

Consideriamo un ellissoide fisso di semiassi a, b, c; e poi due ellissoidi simili, similmente posti e concentrici, infinitamente prossimi; i semiassi siano ha, hb, hc e $(h-dh)a$, $(h-dh)b$, $(h-dh)c$. Essi racchiudono un omoeoide elementare che supporremo omogeneo. L'elemento di volume di un qualsivoglia omoeoide (non elementare) è espresso da $r^2 dr\, d\omega$, se r è il raggio vettore e $d\omega$ l'elemento della superficie sferica unitaria; il potenziale elementare è $kr\, dr\, d\omega$, se k è la densità; il potenziale totale, calcolato nel centro, è

$$\frac{k}{2}\int (r^2 - r_1^2)\, d\omega$$

* THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, pag. 42 (nota).

** NEWTON, l. c., pag. 197; Prop. XCI, Lib. I.

essendo r ed r_1 i valori del raggio vettore limitati dalle due superficie dell'omoeoide. Supponiamolo ora elementare e siano α, β, γ i coseni direttori del raggio; quindi

$$r^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=h^2,$$

$$r_1^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=(h-dh)^2,$$

$$(r^2-r_1^2)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=2h.dh;$$

cioè il potenziale dell'omoeoide elementare è

$$kh.dh\int\frac{d\omega}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}.$$

L'integrale esteso alla superficie sferica unitaria si può ridurre ad un integrale semplice (integrale ellittico). Basterà considerare il solo ottante degli assi positivi, e riferire i punti della sfera al solito sistema di coordinate sferiche θ, φ. Abbiamo

$$\alpha=\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\quad \beta=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad \gamma=\cos\theta,$$

$$d\omega=\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=A\cos^2\varphi+B\operatorname{sen}^2\varphi,$$

dove

$$A=\frac{\cos^2\theta}{a^2c^2}(a^2+c^2\operatorname{tang}^2\theta),\quad B=\frac{\cos^2\theta}{b^2c^2}(b^2+c^2\operatorname{tang}^2\theta).$$

L'integrale esteso alla sfera è dunque eguale a

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\operatorname{sen}^2\varphi};$$

ma l'integrazione, rispetto a φ, dà $\frac{\pi}{2\sqrt{AB}}$; quindi l'integrale è

$$4\pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{(a^2 + c^2\operatorname{tang}^2\theta)(b^2 + c^2\operatorname{tang}^2\theta)}}.$$

Sotto integrale moltiplico e divido per

$$c : \cos\theta = \sqrt{c^2 + c^2\operatorname{tang}^2\theta}$$

e poscia pongo

$$c\operatorname{tang}\theta = \sqrt{u}.$$

L'integrale si trasforma facilmente in questo

$$2\pi abc \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Dunque la funzione potenziale di un omoeoide elementare in un punto dello spazio interno è

$$(1)\quad 2\pi kabch.dh \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Possiamo anche porla sotto la forma

$$(2)\quad 2\pi kabch^2.dh \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2h^2+u)(b^2h^2+u)(c^2h^2+u)}};$$

e con ciò il fattore dell'integrale ha un semplice significato; detta infatti m la massa dell'omoeoide si ha:

$$m = \frac{4}{3}\pi abc[h^3 - (h - dh)^3] = 4\pi abch^2.dh;$$

cioè quel fattore è la metà della massa dell'omoeoide.

§ 4. Attrazione di un omoeoide qualunque.— L'omoeoide sia compreso tra due ellissoidi corrispondenti ai valori $h_1 > h_0$ di h e sia decomponibile in tanti omoeoidi elementari omogenei, ma di densità diversa. Però la densità k di ciascuno è funzione di h. L'omoeoide divide lo spazio in tre regioni che, come nel caso dell'involucro sferico, distingueremo con e', i, e. Nella (1) facendo variare h da h_0 ad h_1, avremo

$$V_{e'} = 2\pi abc \int_{h_0}^{h_1} kh.dh \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{U}},$$

dove

$$U = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u).$$

Poniamo

$$(3) \qquad 2\int_h^1 kh.dh = f(1-h^2);$$

sarà quindi

$$(4) \qquad f(0) = 0, \quad f'(1-h^2) = k;$$

e però

$$(5) \quad V_{e'} = \pi abc[f(1-h_0^2) - f(1-h_1^2)] \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Consideriamo ora il punto P nello spazio esterno e; siano due ellissoidi (h ed $h - dh$) dell'omoeoide e per P conduciamo un ellissoide omofocale al primo; consideriamo pure l'ellissoide, infinitamente prossimo, omofocale al secondo. Formeremo in P un omoeoide omofocale ad (h, h—dh). Dimostreremo (§ 5) che se essi hanno la stessa

massa, esercitano la stessa attrazione su P. Allora possiamo applicare la (2); ma perchè l'equazione dell'ellissoide omofocale per P è della forma

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=h^2, \tag{6}$$

in quella formula muteremo a^2 in $a^2+\lambda$, ecc. mentre il fattore dell'integrale, per l'osservazione fatta sulla massa, non varia.

Dunque il potenziale dell'omoeoide elementare in P è

$$2\pi k a b c h^2 . dh \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2h^2+h^2\lambda+u)\ldots}}.$$

Cambiamo $h^2\lambda+u$ in h^2u, ecc.; l'espressione precedente si trasformerà in questa

$$2\pi k a b c h . dh \int_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{U}},$$

in cui λ, per la (6), è funzione di h e delle coordinate di P.

Facendo ora variare h tra h_0 ed h_1 avremo

$$V_e=2\pi a b c \int_{h_0}^{h_1} k h . dh \int_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{U}};$$

e per le (4)

$$V_e=-\pi a b c \int_{h_0}^{h_1} f'(1-h^2)\, d(1-h^2) \int_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Integriamo per parti e diciamo λ_0 e λ_1 i valori di λ per $h=h_0$, h_1. Avremo

$$V_e = -\pi a b c\left[f(1-h_1^2)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}\right.$$

$$\left.-f(1-h_0^2)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}-\int_{h_0}^{h_1}f(1-h^2).d\int_{\lambda}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}\right].$$

Ma

$$d\int_{\lambda}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}} = -\frac{d\lambda}{\sqrt{U(\lambda)}};$$

onde

$$(7)\left\{\begin{aligned}&V_e = \pi a b c\left[f(1-h_0^2)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}\right.\\&\left.-f(1-h_1^2)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}-\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}f(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}\right].\end{aligned}\right.$$

Supponiamo finalmente che il punto P sia nello spazio i. Conduco per P un ellissoide simile e similmente posto ai due dati e sia h' il corrispondente valore di h; per l'omoeoide tra h_1 e h' applico la (5), e per quello tra h' ed h_0 applico la (7). Sommando le espressioni trovate e notando che il valore di λ corrispondente ad h' è nullo, si ha:

$$V_i = \pi a b c[f(1-h'^2)-f(1-h_1^2)]\int_{0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}$$

$$+\pi a b c\left[f(1-h_0^2)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}\right.$$

$$\left.-f(1-h'^2)\int_{0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}+\int_{0}^{\lambda_0}f(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}\right]$$

cioè

$$(8)\begin{cases} V_i = \pi a b c\Big[f(1-h_0^2)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}} \\ -f(1-h_1^2)\int_0^{\infty}\frac{du}{\sqrt{U}}+\int_0^{\lambda_0}f(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}\Big]. \end{cases}$$

Passiamo ora al caso di un ellissoide di semiassi a, b, c, stratificato nel modo già detto. Avremo quindi $h_1 = 1$, $h_0 = 0$; e per la (6) risulta che λ_1 è la radice positiva (perchè corrispondente all'ellissoide omofocale) della

$$(9)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

mentre $\lambda_0 = \infty$, e quindi da (7) e da (8) avremo:

$$(10)\begin{cases} V_e = \pi a b c\displaystyle\int_{\lambda}^{\infty} f(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}, \\ V_i = \pi a b c\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(1-h^2)\frac{du}{\sqrt{U}}, \end{cases}$$

dove

$$1-h^2 = 1-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}.$$

Se finalmente l'ellissoide è omogeneo (la densità eguale ad uno)

$$f(1-h^2) = 2\int_h^1 h\,.\,dh = 1-h^2,$$

onde

$$(11)\quad V_e=\pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}\right)\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Per il punto interno, $\lambda = 0$.

Se poniamo

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}},$$

e notiamo che

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a^2} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{U}}, \text{ ecc.}$$

risulta

$$V_i = \pi a b c \left(\mathfrak{J} + 2x^2 \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a^2} + 2y^2 \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial b^2} + 2z^2 \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial c^2} \right),$$

sicchè tutto si riduce al calcolo di $\mathfrak{J}$.

Se diciamo $\mathfrak{J}_1$ ciò che diventa $\mathfrak{J}$ quando al posto di $a^2, \ldots$ si sostituisce $a^2 + \lambda = a_1^2$, ecc. avremo una espressione analoga per V_e.

Dalle (10) si può dedurre un risultato notevole. Siano $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{E}_1$ due ellissoidi omofocali di semi-assi a, b, c ed a_1, b_1, c_1, stratificati omogeneamente come si è detto. Pel secondo avremo

$$V'_e = \pi a_1 b_1 c_1 \int_{\lambda_1}^\infty f\left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+u} - \cdots\right) \frac{du}{\sqrt{(a_1^2+u)\ldots}},$$

in cui λ_1 è la radice positiva di

$$\frac{x^2}{a_1^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda_1} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda_1} = 1.$$

Ma poichè i due ellissoidi sono omofocali, è pure

$$a_1^2 = a^2 + \rho, \quad b_1^2 = b^2 + \rho, \quad c_1^2 = c^2 + \rho;$$

quindi per la (9) deve essere

$$\lambda = \lambda_1 + \rho.$$

Avremo perciò

$$V'_e = \pi a_1 b_1 c_1 \int_\lambda^\infty f\left(1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \cdots\right) \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Cioè V'_e è identico con V_e, purchè in questa si sostituisca f con $\frac{a_1 b_1 c_1}{a b c} f$. Dico che i due ellissoidi sono di egual massa. Infatti la massa m del primo è

$$m = 4\pi a b c \int_0^1 f(1 - h^2) h\, dh,$$

e quella del secondo

$$m_1 = 4\pi a_1 b_1 c_1 \int_0^1 \frac{a b c}{a_1 b_1 c_1} f(1 - h^2) h\, dh = m.$$

Questi due ellissoidi omofocali e omogeneamente stratificati esercitano dunque la stessa attrazione all'esterno. In particolare poi risulta il teorema di MACLAURIN:

Due ellissoidi omogenei ed omofocali esercitano, su punti esterni, attrazioni dirette secondo la stessa retta e proporzionali alle masse.

Posto

$$A = \pi a b c \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{U}}, \text{ ecc.}$$

le superficie equipotenziali interne per un ellissoide omogeneo sono

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = \text{cost.}$$

cioè ellissoidi concentrici al dato e i cui assi sono

proporzionali a $\frac{1}{\sqrt{A}}$, ecc. Le superficie equipotenziali esterne sono trascendenti e dette *plintoidi* da THOMSON *.

§ 5. **Teoremi di Chasles.** — Si deformi un ellissoide $\mathfrak{E}$ di semiassi a, b, c in modo che resti

---

* Il problema dell'attrazione degli ellissoidi fu cominciato a risolvere da NEWTON che trattò il caso degli ellissoidi di rotazione per posizioni particolari del punto potenziato. *Principia,* pag. 197. MACLAURIN trattò con la sola geometria il caso del punto in superficie dell'ellissoide di rotazione, e dimostrò il teorema che da lui s'intitola anzitutto per un punto dell'asse di rotazione, e poi per un punto nel piano dell'equatore; e, in questo caso, lo estese a due qualunque ellissoidi omofocali. *Traité des fluxions,* Lib. I, Ch. XIV; art. 649, 651 e 653. LAGRANGE [Nouveaux Mém. de Berlin (1773)]; LEGENDRE, [Mém. prèses. par divers Savants étrangers, X (1785)], considerarono altri casi. LAPLACE, [Mém. de l'Ac. d. Sciences (1782)] e di nuovo LEGENDRE (ibidem, 1788) dimostrarono il teorema in generale e quindi risolvettero in modo completo il problema dell'attrazione. I successivi lavori d'IVORY [Philos. Trans. (1809)], GAUSS [Ges. Werke, **5**, pagina 3 (1813)], CHASLES [J. de l'École Polytech. Cah. 25 (1837); J. de Liouville, **5** (1840)] e DIRICHLET [Ac. de Berlin (1839)] portarono la soluzione ad un grado estremo di semplicità.

Vedi ancora THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, pag. 43. ROUTH, *A Treatise on analytical Statics,* **2** (1892). CHASLES, *Aperçu historique*, pag. 163-168. BELTRAMI, [Mem. Acc. Sc. di Bologna **1**; (1880)].

sempre omofocale a sè stesso; gli assi siano diventati a', b', c' e tra le coordinate di due punti corrispondenti P e P' qualunque sussistano le relazioni

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'},$$

dove

$$a'^2 = a^2 + \lambda, \text{ ecc.}$$

Una tale deformazione dicesi pura *.

Se P, Q, ... sono su $\mathfrak{E}$, i loro corrispondenti P', Q', ... sono su $\mathfrak{E}'$; inoltre si vede subito che la distanza PQ' è una funzione simmetrica delle coordinate di P e Q e però è uguale a $P'Q$.

Un parallelepipedo, durante la deformazione, resta sempre parallelepipedo e il rapporto tra i due volumi è eguale al rapporto dei volumi dei due ellissoidi.

Ciò posto consideriamo due omoeoidi elementari omofocali di egual massa. Dico che il potenziale del primo $\mathfrak{E}'$ in un punto P del secondo $\mathfrak{E}$ è eguale a quello del secondo, nel punto corrispondente P' del primo, supponendo la legge dell'attrazione una funzione qualunque della distanza. Assumo infatti in $\mathfrak{E}$ un altro punto Q il cui corrispondente in $\mathfrak{E}'$ è Q' e intorno a Q un volume

* Thomson a. Tait, l. c., **2**, pag. 74.

elementare τ colla densità k; siano τ', k' i corrispondenti valori in Q'.

Se dividiamo il primo omoeoide in elementi di volume tutti eguali, i corrispondenti elementi saranno pure eguali e quindi τ e τ' stanno tra loro come i volumi dei due omoeoidi; supponiamoli omogenei, allora le masse dei due elementi stanno come le masse dei due omoeoidi; cioè saranno eguali. Ma il potenziale dell'elemento τ di Q in P' essendo eguale alla massa di τ per una funzione di $P' Q$, sarà lo stesso che il potenziale di τ' in P; quindi risulta quanto si era asserito.

Nel caso della legge di NEWTON il potenziale di $\mathfrak{E}'$ in P (interno) è costante; quindi se P' varia su $\mathfrak{E}'$ il potenziale di $\mathfrak{E}$ è costante:

Le superficie esterne equipotenziali di un omoeoide elementare sono ellissoidi omofocali e però l'attrazione in un punto esterno è normale all'ellissoide omofocale passante per quel punto *.

Risulta ancora il teorema di CHASLES:

Due omoeoidi elementari di egual massa esercitano la stessa attrazione in tutti i punti esterni.

In particolare

L'attrazione di un omoeoide elementare su di un punto esterno è quella stessa della sua ellissi focale di egual massa.

---

* POISSON, Connaissance des Temps (1837).

Se poi si tratta di due omoeoidi qualunque omofocali possiamo dividerli in tanti omoeoidi elementari e ricadiamo nel teorema del § precedente.

§ 6. Alcuni teoremi generali sull'attrazione *.

a) Se V è la funzione potenziale di un sistema di masse esterne ad una sfera σ di centro O e di raggio a, si ha

$$V_0 = \frac{1}{4\pi a^2} \int V d\sigma, \tag{12}$$

cioè *il valore di V nel centro è eguale alla media dei valori di V su σ* **.

Sia infatti m una delle masse collocata in P; il valore di V in un punto qualunque di σ, dovuto alla sola massa m, è $\frac{m}{r}$ ed esteso a tutta la sfera è $m \int \frac{d\sigma}{r}$. Ma $\int \frac{d\sigma}{r}$ è la funzione potenziale di uno strato omogeneo (di densità uno) situato su σ: supponendo, § 2, riunita tutta la massa in O, tale funzione potenziale è $\frac{4\pi a^2}{OP}$. Ripetendo lo stesso per tutte le masse abbiamo

$$\int V d\sigma = 4\pi a^2 \sum \frac{m}{OP} = 4\pi a^2 V_0 \text{ ***}.$$

* Per maggiori particolari rimandiamo il lettore alla *Teoria mat.*, già citata ed ai trattati ivi citati.

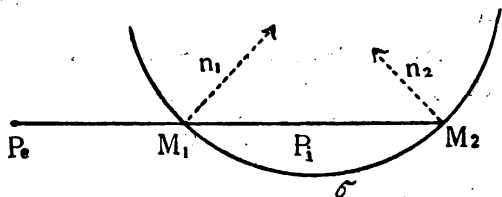
** GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze*, u. s. w. (1840). Ges. Werke, 5, pag. 195.

*** GAUSS, l. c., pag. 222.

b) Data una certa distribuzione di masse e una superficie chiusa σ; se F_n è la componente della attrazione, in ogni punto di σ, secondo la normale interna a σ, ed M la somma delle masse racchiuse da σ, si ha

$$\int F_n \, d\sigma = -4\pi M ; \tag{13}$$

l'integrale a primo membro si dice *flusso di forza* attraverso σ; e però l'equazione precedente esprime il *teorema sul flusso di forza* *.

Consideriamo (Fig. 19) anzitutto il caso di

(*Fig. 19*).

una sola massa m concentrata in un punto P_e esterno a σ; per P_e conduciamo una retta che incontri σ almeno in due punti M_1, M_2; e intorno a questi consideriamo due elementi d'area $d\sigma_1$, $d\sigma_2$. Se $d\omega$ è il solito elemento di sfera unitaria con centro in P_e, si ha

$$d\sigma_1 = \frac{r_1^2 \, d\omega}{\cos(r\, n_1)}, \qquad d\sigma_2 = -\frac{r_2^2 \, d\omega}{\cos(r\, n_2)}.$$

---

* GAUSS, l. c., pag. 224.

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k;$$

mentre nello spazio libero da masse ($k = 0$)

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ *}.$$

e) La funzione potenziale non può avere nè massimi, nè minimi assoluti nello spazio libero da masse. Se in P la V è massima, costruendo col centro in P una sfera in modo da non includer masse, la V decresce da P in Q (sulla sfera): la forza è sempre negativa, cioè diretta da Q verso P, e però non può essere $\int F_n \, d\sigma = 0$.

Limitando però il modo di spostamento, p. es. facendo spostare il punto potenziato lungo una curva in modo da non incontrar masse, potrà benissimo accadere che, per alcuni punti, la funzione V sia massima o minima. Dunque l'equilibrio di P, se ha luogo, non può essere stabile o instabile per qualsiasi spostamento; ma stabile per alcuni e per altri instabile **.

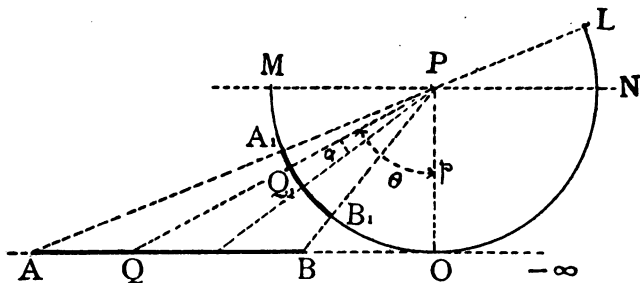
---

* La (16) esprime il teorema di LAPLACE [Mém. Ac. d. Sciences (1787), pag. 249], la (15) quello di POISSON [Nouv. Bull. Soc. philom., **3**, pag. 388 (1813)].

** THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, pag. 50. Per altri teoremi vedi la *Teoria matematica dell'equilibrio*, ecc. Cap. 2°, § 14.

Esercizi.

1. Determinare l'attrazione di un'asta rettilinea omogenea.

Centro in P (Fig. 20) descrivasi con raggio p un arco

(Fig. 20)

di cerchio $A_1 B_1$; siano Q, Q_1 due elementi corrispondenti visti da P secondo un angolo $d\theta$. L'attrazione di Q su P è $k\,dx : \overline{PQ}^2 = kp.d\,\text{tang}\theta : \dfrac{p^2}{\cos^2\theta} = \dfrac{k\,d\theta}{p}$; quella di Q_1 (la densità essendo la stessa) è $kp\,d\theta : p^2 = \dfrac{k\,d\theta}{p}$: onde l'attrazione di AB è la stessa di quella di $A_1 B_1$. La forza è diretta secondo bisettrice di angolo APB; la risultante dell'attrazione di Q_1 e del suo simmetrico rispetto alla bisettrice è $\dfrac{2k\,d\alpha}{p}\cos\alpha$; quindi il valore della forza risultante è

$$\frac{2k}{p}\,\text{sen}\,\frac{APB}{2}.$$

Si deduce subito che le linee di forza (in ogni piano passante per AB) sono iperboli coi fuochi in A e B e quindi le linee

di livello sono ellissi omofocali, e, nello spazio, ellissoidi rotondi.

Il calcolo diretto di V è anche semplice; perchè

$$V = k \int_b^a \frac{dx}{PQ} = k \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p^2}},$$

avendo posto l'origine in O, ed essendo a e b le ascisse dei punti A e B. Quindi se $PA = r$, $PB = r'$, risulta

$$V = k \log \frac{a + r}{b + r'}.$$

Contando le distanze dal punto medio di $AB = 2c$, cioè ponendo

$$a = \xi + c, \quad b = \xi - c$$

e notando che se α è il semiasse maggiore dell'ellissi (di fuochi A e B) passante per P, si ha

$$r = \alpha + e\xi, \quad r' = \alpha - e\xi, \quad c = \alpha e$$

risulta

$$V = k \log \frac{2\alpha + 2c}{2\alpha - 2c} = k \log \frac{r + r' + 2c}{r + r' - 2c};$$

oppure posto

$$r + r' = 2c \operatorname{Ch} v$$

otteniamo

$$V = \frac{k}{2} \log \operatorname{Cotgh} \frac{v}{2},$$

donde si deducono i risultati precedenti.

Se B tende all'infinito si ha

$$V = k \log (a + r).$$

Se consideriamo due semirette $A\infty$, e $B-\infty$ e i punti della prima attraggono il punto P, quelli della seconda lo respingono, dovremo per i primi considerare l'attrazione dell'arco $A_1 M$ e per i secondi quella (con segno mutato) di $B_1 N$ e però, in totale, quella dell'intero arco $B_1 L$; però la risultante è diretta secondo la bisettrice dell'angolo esterno BPL; dunque le ellissi di fuochi A, B saranno ora le linee di forza e

gli iperboloidi rotondi (di stessi fuochi) saranno le superficie equipotenziali.

[THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, pag. 27, 28; SCHELL, l. c., **2**, pag. 284].

2. Attrazione di un disco circolare omogeneo su di un punto posto sulla normale al centro O.

Sia $PO = p$; l'attrazione è diretta secondo PO. Considero un cerchio di raggio $QO = r$ e quello infinitamente prossimo: l'attrazione di questo anello è $\frac{2\pi k r dr}{\overline{PQ}^2}$ e la sua componente secondo PO è

$$\frac{2\pi k r dr}{\overline{PQ}^3} p = \frac{2\pi k p r dr}{(p^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e però tutta l'attrazione è

$$\pi k p \int_0^a \frac{2 r dr}{(p^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi k \left[1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}}\right].$$

Per un piano infinito diventa $2\pi k$. Egualmente semplice è il calcolo diretto di V, perchè

$$V = 2\pi k \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{p^2 + r^2}} = 2\pi k [\sqrt{p^2 + a^2} - p];$$

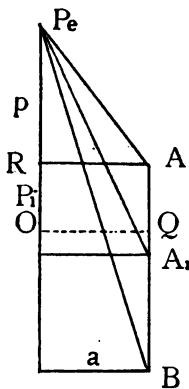
donde

$$F = -\frac{\partial V}{\partial p} = 2\pi k \left[1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}}\right].$$

3. Attrazione di un cilindro circolare retto omogeneo su di un punto del suo asse.

Supponiamo P esterno (Fig. 21); decomponiamo il cilindro in tanti dischi QO circolari di raggio a; posto $PO = x$, $PR = p$, $AB = l$, applicando la formula precedente si ha

$$F = 2\pi k \int_p^{p+l} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right] dx = 2\pi k [l + PA - PB].$$

Se P è interno, il cilindro AA_1 che ha per centro di massa P, non ha influenza sull'attrazione di P. Posto dunque $A_1B = l_1$ e notando che $PA_1 = PA$, muteremo nella formula precedente l in l_1.

(Fig. 21)

Il calcolo di V è egualmente facile. Se B tende all'infinito, $l - PB$ tende a $-PR$ e quindi

$$F = 2\pi k(PA - PR).$$

4. Lo stesso per un solido di rivoluzione limitato tra due paralleli.

Il punto P è sull'asse e si procede come nell'esercizio precedente. Se $r = \varphi(x)$ è l'equazione della curva meridiana si ha

$$F = 2\pi k\left[l - \int_p^{p+l} \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right].$$

Così, ad esempio, per un tronco di cono, $r = x \tang \alpha$; si ha

$$F = 2\pi k l(1 - \cos\alpha):$$

e così si può applicare la stessa formula al caso di un segmento sferico, tronco di paraboloide, ecc.

5. Due lamine omogenee sezioni di uno stesso cono esercitano la stessa attrazione sul vertice.

Infatti gli elementi corrispondenti stanno come i quadrati dei raggi, ecc.

6. Assegnare il valore di $\mathfrak{J}$, § 4, per $a = b$.

Si ha

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{c^2 + u}};$$

ponendo $a^2 + u = t^{-2}$ si riduce a forme note e si trova

$$\mathfrak{J} = \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - a^2}}{a}, \quad c > a$$

$$\mathfrak{J} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arsen} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}, \quad a > c.$$

Per la (1) il calcolo di $\mathfrak{J}$ è importante per l'attrazione di un omoeoide elementare. Se i semiassi d'una ellissi sono a e b; c è la semidistanza focale e l'ellissi ruota intorno a; posto

$$a^2 + u = c^2 \operatorname{Ch}^2 v, \quad b^2 + u = c^2 \operatorname{Sh}^2 v$$

si trova

$$\mathfrak{J} = \frac{2}{c} \log \operatorname{Cotgh} \frac{v}{2}$$

e quindi (esercizio 1) il potenziale di un omoeoide ellittico rotondo è identico con quello di una retta omogenea congiungente i fuochi. Ciò è anche evidente dal fatto che le superficie di livello sono le stesse.

7. Attrazione di un cilindro retto, ellittico, infinitamente esteso.

Poichè in tal caso in V un termine tende all'infinito, conviene procedere al calcolo delle componenti della forza. Ora, § 4, si ha

$$X = 2\pi abcx \int_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}},$$

e se c tende all'infinito, $c : \sqrt{c^2 + u}$ tende ad 1; mentre $c : (c^2 + u)^{\frac{3}{2}}$ tende a zero; onde

$$X = 2\pi abx \int_\lambda^\infty \frac{du}{(a^2 + u)^{\frac{3}{2}}(b^2 + u)^{\frac{1}{2}}};$$

Y si ottiene cambiando a in b; ed è $Z = 0$. Posto

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad b^2 + u = c^2 \operatorname{Sh}^2 v,$$

l'integrale indefinito è

$$\frac{2}{a^2 - b^2} \int \frac{dv}{\mathrm{Ch}^2 v} = \frac{2}{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{b^2 + u}{a^2 + u}};$$

onde

$$X = \frac{4\pi a b x}{\sqrt{a^2 + \lambda}\left(\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}\right)},$$

$$Y = \frac{4\pi a b y}{\sqrt{b^2 + \lambda}\left(\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}\right)}.$$

Se diciamo a_1, b_1, i semiassi della ellissi omofocale alla base del cilindro, passante pel punto potenziato, avremo (pel punto esterno)

$$X_e = \frac{4\pi a b}{a_1 + b_1} \frac{x}{a_1}, \quad Y_e = \frac{4\pi a b}{a_1 + b_1} \frac{y}{b_1}$$

e pel punto interno ($\lambda = 0$)

$$X_i = \frac{4\pi a b}{a + b} \frac{x}{a}, \quad Y_i = \frac{4\pi a b}{a + b} \frac{y}{a}.$$

Si ha poi

$$F_e = \frac{4\pi a b}{a_1 + b_1} \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2}}, \quad F_i = \frac{4\pi a b}{a + b} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

cioè è costante su cilindri omofocali al dato, per i punti esterni; e su cilindri simili al dato, per i punti interni.

8. Calcolo diretto dell'attrazione di un ellissoide omogeneo su di un punto interno.

Per P conduciamo un ellissoide simile e similmente posto al dato e siano ma, mb, mc i suoi semi-assi. Basterà calcolare l'attrazione di questo ellissoide su P. Considero un elemento di volume, che proietto da P; esso è dato da $r^2 dr d\omega$; la sua attrazione su P è $dr d\omega$ e quindi quella del cono che ha per base un elemento M di superficie dell'ellissoide tracciato, e vertice P, è $r d\omega$ ($r = PM$).

Siano α, β, γ i coseni di PM; le coordinate di M, cioè $x + r\alpha$, ... , e quelle di P, cioè x, y, z, devono soddisfare alle

$$\sum \frac{(x + r\alpha)^2}{a^2} = m^2, \quad \sum \frac{x^2}{a^2} = m^2$$

e quindi

$$r = -2\,\frac{\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}+\dfrac{\gamma z}{c^2}}{\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}}\,.$$

Ora la componente X è espressa da $\int r\,\alpha\,d\omega$, estendendo l'integrazione a tutti i valori di α, β, γ; e siccome gl'integrali relativi ad $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, ecc. sono nulli, così

$$X = -x\int\frac{\dfrac{\alpha^2}{a^2}}{\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}}\,d\omega.$$

Se P è origine di un sistema di coordinate sferiche coll'asse x per asse polare, si ha

$$X = -8x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}$$

e questo, § 3, si riduce alla forma

$$X = -2\pi abcx\int_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)\sqrt{U}}\,;$$

e così per Y e Z, a causa della simmetria.

Si noterà che X è della forma $-Ax$, dove

$$A = \int\frac{\dfrac{\alpha^2}{a^2}}{\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}}\,d\omega.$$

Di qui si deduce subito

$$A+B+C = 4\pi, \qquad Aa^2+Bb^2+Cc^2 = \int r^2\,d\omega.$$

[Il calcolo precedente, dovuto a LAGRANGE (Œuvres compl., **2**, pag. 619), non è applicabile al caso del punto esterno e mostra ancora la difficoltà di questo secondo problema rispetto al primo].

9. Funzione potenziale di una lamina piana omogenea.

Sia la distanza $PO = h$; le coordinate polari di un punto della lamina, l'origine essendo O, sono r, θ; ρ è la distanza di questo punto da P, ed R quella di un punto del contorno pure da P; si ha ($k = 1$)

$$V = \int\int \frac{r\,dr\,d\theta}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int (R - h)\,d\theta.$$

Se quindi O cade nell'interno della lamina

$$V = \int R\,d\theta - 2\pi h\,;$$

se cade all'esterno:

$$V = \int R\,d\theta.$$

L'angolo visuale dell'elemento in (r, θ) dal punto P è *

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dh}\,r\,d\theta\,dr = h\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\rho}\,d\rho\,d\theta$$

e quello di un triangolo elementare col vertice in O e la base sul contorno è

$$h\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R}\right)d\theta = \left(1 - \frac{h}{R}\right)d\theta\,;$$

l'angolo visuale dell'area intera è

$$(\sigma) = \int\left(1 - \frac{h}{R}\right)d\theta\,;$$

ma la componente dell'attrazione normalmente al piano essendo

$$-\frac{\partial V}{\partial h} = \int\left(1 - \frac{\partial R}{\partial h}\right)d\theta = \int\left(1 - \frac{h}{R}\right)d\theta,$$

risulta che tale componente è espressa da (σ).

---

* Teoria matem. già citata, pag. 8.

Inoltre

$$R - h = \frac{r^2 + h^2}{R} - h = \frac{r^2}{R} - h\left(1 - \frac{h}{R}\right); \quad r^2 d\theta = p\, ds$$

se p è la normale condotta da O sulla tangente al contorno il cui elemento è ds: e però

$$V = \int \frac{p\, ds}{R} - h(\sigma).$$

Così, nel caso di un poligono piano p è costante per ciascun lato, mentre $\int \frac{ds}{R}$, esprime il potenziale in P di un'asta omogenea eguale al lato e la cui densità è 1; indicando questi potenziali con V_1, V_2, ... si ha

$$V = -h(\sigma) + p_1 V_1 + p_2 V_2 + \dots$$

calcolando le p con segni opportuni.

(ROUTH, l. c., 2).

10. Lo stesso problema supponendo l'attrazione inversamente proporzionale alla 5ª potenza della distanza.

Si ha

$$V = \frac{1}{4} \int\int \frac{r\, dr\, d\theta}{(r^2 + h^2)^2} = \frac{1}{8h^2} \int \frac{r^2\, d\theta}{R^2}$$

cioè

$$V = \frac{1}{8h^2} \int \frac{p\, ds}{R^2}.$$

11. Trovare il solido rotondo di volume dato che esercita la massima attrazione sul punto in cui l'asse di rotazione incontra il corpo.

Sia O tal punto; r, θ le coordinate di un punto della curva meridiana; θ_0 l'angolo che la tangente in O forma coll'asse di rotazione (asse polare). L'attrazione del cono elementare è $r\, d\omega$; la sua componente secondo l'asse è $r \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$; mentre il volume è $\frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Dunque dobbiamo far massimo

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\theta_0} r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta, \quad \text{con} \quad \int_0^{\theta_0} r^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \text{cost.}$$

Posto

$$\cos\theta = x, \quad \cos\theta_0 = x_0, \quad \int_0^{\theta} r^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = y,$$

si ha

$$\frac{dy}{d\theta} = r^3 \operatorname{sen}\theta, \quad dx = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta \quad \text{e quindi} \quad r^3 = -\frac{dy}{dx};$$

$$\mathfrak{J} = \int_1^{x_0} \sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}\, x\, dx.$$

Operando colle regole del calcolo delle variazioni si trova

$$x\, y'^{-\frac{2}{3}} = c, \qquad y' = -r^3 = c\, x^{\frac{3}{2}}$$

cioè

$$r^2 = c^2 \cos\theta$$

equazione della curva meridiana.

Si può dare una dimostrazione diretta e supponiamo anzi che la legge di attrazione sia $\frac{k}{r^n}$. Sull'asse di rotazione (delle x) considero un punto B attratto da O con una intensità eguale a distanza: quindi $\frac{k}{a^n} = a$.

Per B tracciamo una normale qualunque ad OB e da O una retta che la seghi in D. Su OD determino un punto C tale che la sua attrazione da parte di O sia ancora eguale alla distanza, cioè OD. Se r, θ sono le coordinate di C avremo

$$\frac{k}{r^n} = OD = \frac{a}{\cos\theta}$$

onde

$$r^n = a^n \cos\theta;$$

equazione della curva luogo dei punti C, passante per O e B. L'equazione in coordinate cartesiane è $(x^2 + y^2)^{n+1} = a^{2n} x^2$ di grado $2(n+1)$. L'attrazione di C lungo x è sempre la stessa a. Colla rotazione intorno x generiamo una superficie: i punti dello spazio interno attraggono con maggiore inten-

sità di quelli esterni. Distribuendo dunque con continuità una data massa entro la superficie essa attrarrà O con una forza che è più grande di quella che se la massa stesse parte dentro e parte fuori della superficie.

[KNESER, l. c., § 9. SCHELL, l. c., **2**, pag. 340].

CAPITOLO SETTIMO.

PRINCIPÎ DELLA MECCANICA DEI FLUIDI O IDROMECCANICA.

§ 1. **Equazioni di equilibrio dei fluidi** *. — In una massa fluida in equilibrio pensiamo tracciata una superficie ideale σ chiusa; tolta la parte di fluido esterna a σ, l'equilibrio cessa di sussistere. Noi ammetteremo di poterlo ristabilire applicando

* I limiti ristretti di questo manuale, e lo sviluppo richiesto dai capitoli precedenti, non hanno consentito la trattazione di questa parte della Meccanica con una grande generalità, premettendo cioè lo studio di quella dei corpi continui; che il lettore troverà svolta al Cap. 3° della mia *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*. Si vedrà subito in qual modo facile le formule di questo § discendono da quelle ivi stabilite. Si veda ancora: APPELL, 3° volume dell'opera più volte citate; MAGGI, *Teor. matem. del movimento dei corpi* (1894), pag. 419 e seg.; A. G. GREENHILL, *A Treatise on Hydrostatics*, London 1894; BESANT a. RAMSEY, *Hydromechanics*, Part. I, London 1904, Sixth Edition.

su ogni punto di σ una forza normale all'elemento e diretta verso l'interno di σ; proporzionale all'elemento stesso e indipendente dalla sua orientazione, cioè avente lo stesso valore in un punto qualunque M dell'elemento $d\sigma$, qualunque sia la direzione della normale n.

Rappresentando con $P\,d\sigma$ tale forza, P dicesi *grandezza specifica della pressione* del fluido in M e sarà funzione delle sole coordinate o del posto di M. I fluidi per cui è valida l'ipotesi suddetta diconsi *perfetti*.

La supposta mancanza di viscosità, che permette alle molecole fluide di scorrere le une sulle altre senza incontrare resistenza; il principio sperimentale di PASCAL dell'eguaglianza di pressione in tutti i sensi *, hanno precisamente suggerita l'ipotesi posta a base di queste considerazioni.

La massa fluida sia ancora soggetta a forze esterne (come p. es. la gravità) che riferite all'unità di massa abbiano per componenti X, Y, Z. Poichè le componenti di P sono $P\cos(nx)$, ..., in virtù di uno dei postulati della Statica, per l'equilibrio della massa fluida racchiusa entro σ, debbono valere intanto le equazioni per l'equilibrio di un corpo rigido: se dunque ρ è la densità, $d\tau$ l'elemento di volume, avremo:

---

* MACH, l. c., pag. 86, Cap. I.

$$(1)\quad \begin{cases} \int \rho X d\tau + \int P \cos(nx)\, d\sigma = 0, \\ \int \rho (yZ - zY) d\tau \\ + \int P[y \cos(nz) - z \cos(ny)] d\sigma = 0, \text{ ecc.} \end{cases}$$

Ammettiamo inoltre che P sia regolare entro tutta la massa e derivabile. Applicando il teorema della divergenza (Cap. 6°, § 6) si ha

$$\int P \cos(nx)\, d\sigma = -\int \frac{\partial P}{\partial x} d\tau, \text{ ecc.}$$

$$\int P[y \cos(nz) - z \cos(ny)]\, d\sigma$$

$$= -\int \left(\frac{\partial (Py)}{\partial z} - \frac{\partial (Pz)}{\partial y} \right) d\tau, \text{ ecc.}$$

Le prime tre delle (1) si trasformano in queste

$$\int \left(\rho X - \frac{\partial P}{\partial x} \right) d\tau = 0, \text{ ecc.};$$

le quali, dovendo valere per qualunque volume τ, ci dànno le equazioni fondamentali

$$(2)\quad \rho X = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \rho Y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \rho Z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Le ultime tre delle (1) risultano, in conseguenza, identicamente soddisfatte.

In superficie è poi chiaro che la forza esterna deve essere in ogni punto uguale alla pressione del

fluido, rivolta verso l'interno, normalmente all'elemento cui si immagina applicata.

Se la pressione non dipende dalla densità, cioè se ρ (a temperatura costante) è funzione delle sole coordinate del punto M, si dice, e ne vedremo la ragione, che il fluido è *incompressibile;* ed è, prossimamente, il caso dei liquidi. Se in particolare ρ è costante, il fluido è omogeneo.

In ogni altro caso dicesi *compressibile* o *gas;* esiste allora una relazione tra P e ρ (§ seguente).

Notiamo poi che se il fluido non è soggetto a forze, oppure se la densità è assai piccola rispetto alle forze esterne, in una prima approssimazione si può ritenere che siano nulle le derivate di P e quindi P costante.

§ 2. **Fluidi incompressibili.** — Dalle equazioni (2) si deduce

$$(3) \qquad \rho(X dx + Y dy + Z dz) = dP,$$

cioè il trinomio a primo membro deve essere un differenziale esatto; però è necessario e basta che

$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y}; \text{ ecc.}$$

Sviluppando, avremo la prima delle seguenti equazioni

$$(4) \quad \rho\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = Z\frac{\partial \rho}{\partial y} - Y\frac{\partial \rho}{\partial z}; \text{ ecc.}$$

Moltiplicando per X, Y, Z e sommando si ha

$$(5)\quad \begin{cases} X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) \\ \qquad + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0. \end{cases}$$

Perchè dunque sia soddisfatta la (3), è necessario e basta sieno soddisfatte due delle (4) e la (5) che è una relazione tra le sole forze esterne.

Essa esprime che le linee di forza

$$dx : dy : dz = X : Y : Z$$

ammettono un sistema di superficie ortogonali. Poscia con sole quadrature, la (3) ci farà conoscere P a meno di una costante arbitraria; e cioè

$$(6)\qquad P = \varphi(x, y, z) + \text{cost.};$$

e però cognita P in un sol punto, sarà nota dovunque.

Le superficie

$$\varphi(x, y, z) = \text{cost.},$$

sopra ognuna delle quali è costante la pressione, diconsi *isobariche* o di *livello*, perchè la superficie libera di un liquido a pressione costante è certamente una di queste.

Poichè P è funzione ad un sol valore, nell'interno della massa fluida, per ogni punto del fluido passa una ed una sola superficie di livello; e due superficie corrispondenti a due diversi valori della costante non possono mai incontrarsi nell'interno del fluido e nè una stessa superficie può intersecar sè stessa.

Si ha poi da (2)

$$X : Y : Z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

onde in ogni punto del fluido la forza è normale alla isobarica passante per quel punto. Quindi le traiettorie ortogonali delle isobariche, cioè le *linee di forza*, hanno la direzione della forza, in ogni punto del fluido, coincidente con quella della tangente.

Se le forze ammettono un potenziale U, cioè se

$$X dx + \ldots = - dU(x, y, z);$$

la (5) è identicamente soddisfatta e la (3) ci dà

$$dP = - \rho \, dU.$$

Dovrà dunque essere

$$\rho = f(U),$$

$$P = F(U) + \text{cost.}$$

Le isobariche coincidono con le $U = \text{cost.}$, cioè con le superficie equipotenziali e con quelle di eguale densità.

Se due fluidi a contatto sono in equilibrio sotto l'azione di forze esterne deducibili da uno stesso potenziale U, per ogni punto della superficie di separazione, pensato appartenente al primo o al secondo fluido, si ha

$$dP = - \rho_1 \, dU, \quad dP = - \rho_2 \, dU$$

onde $(\rho_1 \neq \rho_2)$

$$dU = 0.$$

La superficie di separazione è una superficie equipotenziale.

Finalmente nel caso particolare di un liquido omogeneo, $\rho =$ cost. e la (3) esprime che il lavoro elementare delle forze è il differenziale esatto di $P : \rho$; le forze debbono dunque ammettere un potenziale. Se esso è U, avremo

$$P = -\rho U + \text{cost.}$$

L'equilibrio è possibile. Nel caso di un liquido pesante, colle solite convenzioni, $U = gz$ e quindi

$$P = P_0 + g\rho(z_0 - z);$$

le superficie di livello sono piani orizzontali. La superficie libera di un liquido pesante omogeneo e convenientemente limitata, a contatto con un gas a pressione costante, è un piano orizzontale: e se si hanno più vasi comunicanti a contatto collo stesso gas, P essendo sempre la stessa, anche la z, ricavata dalla precedente, sarà sempre la stessa; cioè si avrà lo stesso livello *(principio dei vasi comunicanti)*. Se $P_0 = 0$, la differenza di livello misura la pressione *(principio del barometro)*.

Se la superficie libera si compone di due pezzi σ_1, σ_2 e la pressione specifica è la stessa P, le pressioni totali su σ_1 e σ_2 sono $P\sigma_1$ e $P\sigma_2$ cioè proporzionali a σ_1, σ_2 *(principio del torchio idraulico)*.

§ 3. **Fluidi compressibili.** — Le leggi note di Boyle e Gay-Lussac conducono a stabilire subito una relazione tra pressione e densità.

La prima (valida entro limiti determinati) dice che la densità di un fluido, a temperatura costante, varia proporzionalmente alla pressione, cioè

$$P = a\rho \tag{7}$$

essendo a un coefficiente costante per ogni fluido, se è costante la temperatura.

La seconda dice che il rapporto tra la pressione e la densità varia colla temperatura in modo che, se a_0 è il valore di a alla temperatura dello zero del termometro, si ha

$$a = a_0(1 + \alpha t)$$

dove α è il coefficiente di dilatazione del fluido, prossimamente lo stesso per tutti i gas ed eguale a 0,00366. Posto $A = a_0 \alpha$, $T = \frac{1}{\alpha} + t$ (temperatura assoluta) si ha dunque

$$P = A\rho T.$$

Lo studio di questo caso, in cui cioè varia la temperatura, eccede i limiti di questo corso: però supporremo costante la temperatura. La (3) ci dà subito

$$X dx + \cdots = d \log P^a;$$

le forze esterne ammettono un potenziale U e quindi

$$P = P_0 e^{\frac{U_0 - U}{a}};$$

le superficie isobariche coincidono con le equipotenziali.

Per un fluido pesante si ha

$$P = P_0 e^{\frac{g}{a}(z_0 - z)},$$

e quindi per qualunque valore di z, $P \neq 0$; cioè l'equilibrio non è possibile in un recipiente aperto a contatto col vuoto.

La formula precedente, applicata ad uno strato d'aria sufficientemente piccolo, è la base delle cosidette formule barometriche.

§ 4. **Principio d'Archimede.** — Un corpo rigido è immerso in un fluido che eserciterà sopra ogni elemento $d\sigma$ del contorno una pressione $P d\sigma$ normale all'elemento e diretta verso l'interno del corpo. Se x, y, z sono le coordinate d'un punto di $d\sigma$, il sistema di queste pressioni ha per coordinate

$$\mathfrak{F}_x = \int P \cos(nx)\, d\sigma, \text{ ecc.};$$

$$\mathfrak{M}_x = \int P[y \cos(nz) - z \cos(ny)]\, d\sigma, \text{ ecc.}$$

La massa fluida esterna al corpo sia in equilibrio; però esternamente a σ varranno le (2). Le funzioni P, ρ, X, ... non hanno più significato nell'interno di σ; potremo però, ed in infiniti modi, supporle continuate anche attraverso il corpo, in modo che restino sempre regolari e su σ prendano il valore che effettivamente loro compete. Per esempio se immaginiamo tracciate, esternamente a σ, le superficie isobariche, possiamo continuare entro σ la P, colla stessa legge, su ognuna di tali

isobariche; quindi attribuire entro σ alle ρ, X, ... i valori che risultano dalle (2). Applicando il solito teorema della divergenza, otteniamo

$$\mathfrak{F}_x = -\int \frac{\partial P}{\partial x} d\tau = -\int \rho X d\tau, \text{ ecc.}$$

$$\mathfrak{M}_x = -\int \left[\frac{\partial (Py)}{\partial z} - \frac{\partial (Pz)}{\partial y} \right] d\tau$$

$$= -\int \rho (yZ - zY) d\tau, \text{ ecc.}$$

Ora supponiamo tolto il corpo e continuato il fluido colla legge detta.

Diciamo F_x, ... M_x, ... le coordinate del sistema di forze esterne che sollecitano la parte di fluido contenuta nel volume τ e che dicesi brevemente *fluido spostato*. Dalle precedenti si vede che tali coordinate sono rispettivamente eguali e di segno contrario alle $\mathfrak{F}_x$, ... $\mathfrak{M}_x$, ...

Un corpo rigido immerso in un fluido subisce un sistema di pressioni le cui coordinate sono eguali ed opposte a quelle delle forze esterne agenti sul fluido spostato.

Questo risultato si estende subito al caso in cui il corpo è immerso in due liquidi o in liquido e in un fluido in equilibrio ed è pure facile stabilire che *una superficie rigida chiusa e piena di un fluido subisce un sistema di pressioni le cui coordinate sono eguali a quelle delle forze esterne agenti sul fluido.*

Se il fluido è pesante si ha, nelle solite ipotesi,

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -\Pi,$$
$$M_x = -\Pi\eta, \quad M_y = \Pi\xi, \quad M_z = 0;$$

dove Π, ξ, η sono il peso e le coordinate del centro di massa del fluido spostato; dunque

Le pressioni che un fluido pesante esercita su di un corpo immerso ammettono una risultante eguale e contraria al peso del fluido spostato e passante pel centro di massa (spinta idrostatica).

Ciò costituisce il principio d'ARCHIMEDE *.

Supposto il corpo immerso soggetto alla sola forza di gravità e quindi ad una forza applicata al suo centro di massa ed eguale al peso del corpo, per l'equilibrio questa forza deve essere eguale e contraria alla spinta idrostatica; onde

Il peso del volume del fluido spostato deve essere eguale al peso del corpo.

Il centro di massa del corpo e del fluido spostato (centro di spinta) devono trovarsi sulla stessa verticale.

Le quali condizioni riducono la ricerca delle posizioni di equilibrio ad una questione di geometria; ne diamo qualche esempio negli esercizi in cui si accenna pure alle condizioni, ben più importanti, della stabilità.

Nel caso di un liquido a contatto con un

---

* ARCHIMEDE, *De insidentibus aquae.* Prop. 3-7. Archimedis Opera omnia; ediz. Heiberg. MACH, l. c., Cap. 1, pag. 83.

fluido, p. es. l'aria, si può trascurare la spinta idrostatica dovuta al gas, rispetto a quella del liquido e quindi applicare il teorema precedente.

Se il corpo è omogeneo, il centro di spinta coincide col centro di massa del corpo.

§ 5. **Equazioni del moto dei fluidi perfetti.** — Le equazioni del moto possono dedursi collo stesso procedimento col quale, nel § 1, abbiamo dedotte quelle di equilibrio. Applicando infatti i teoremi generali dell'impulso, si deve avere

$$\int \rho \ddot{x}\, d\tau = \int \rho X\, d\tau + \int P \cos(nx)\, d\sigma; \text{ ecc.}$$

e quindi

$$(8) \quad \begin{cases} \rho(X - \ddot{x}) = \dfrac{\partial P}{\partial x}, \quad \rho(Y - \ddot{y}) = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \\ \rho(Z - \ddot{z}) = \dfrac{\partial P}{\partial z}; \end{cases}$$

le equazioni relative ai momenti risultano, dopo ciò, identicamente soddisfatte. Le (8) poi, a loro volta, sono la traduzione del principio di d'ALEMBERT.

Nel caso dei fluidi incompressibili non si ha nessuna relazione tra P e ρ; la densità si suppone nota in ogni punto mentre P è incognito. In ogni altro caso (§ 3) può dirsi che P è una funzione di ρ; cioè

$$(9) \qquad P = f(\rho).$$

Date quindi le forze esterne (unitamente alle condizioni iniziali di moto) le *quattro* equazioni

precedenti non bastano a determinare le *cinque* funzioni incognite x, y, z, P, ρ del tempo.

Si ottiene una quinta equazione, detta di *continuità*, esprimendo che la massa di ogni elemento di fluido (e quindi anche quella di tutto il fluido) deve restare invariata per tutta la durata del moto, nell'ipotesi che esso avvenga con continuità.

Infatti una certa massa fluida occupi all'istante t_0 un volume τ_0; in un punto $M_0(a, b, c)$ qualunque di questo la densità sia ρ_0; all'istante t, il punto M_0 sia venuto in $M(x, y, z)$, in cui la densità è ρ, ed il volume τ_0 occupi un volume τ, luogo dei punti M corrispondenti di M_0. Dobbiamo esprimere che, per l'invariabilità della massa, è

$$\int \rho_0 \, d\tau_0 = \int \rho \, d\tau;$$

per la nota regola della trasformazione degli integrali, se diciamo D il determinante funzionale delle x, y, z, rispetto a, b, c, cioè

$$D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}, \tag{10}$$

abbiamo

$$\int (\rho\,|D| - \rho_0)\, d\tau_0 = 0;$$

e per l'arbitrarietà di τ_0, deve essere

$$\rho\,|D| = \rho_0$$

oppure

$$(11) \qquad \frac{d(\rho D)}{dt} = 0;$$

prima forma dell'equazione di continuità.

Posto per compendio

$$x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \quad x_b = \frac{\partial x}{\partial b}, \text{ ecc.}$$

il determinante D ha per elementi $x_a, x_b, \ldots$; di più non esistono, in generale, delle relazioni tra x, y, z indipendenti da t; quindi $D \neq 0$, e perchè per $t = t_0$, $x_a = 1$, $x_b = 0, \ldots$ e quindi $D = 1$, sarà, per ogni altro valore di t, $D > 0$.

Ora le x, y, z sono funzioni delle a, b, c (valori iniziali) e reciprocamente; quindi

$$dx = x_a da + x_b db + x_c dc, \quad dy = y_a da + y_b db + y_c dc$$
$$dz = z_a da + z_b db + z_c dc;$$

risolvendo tale sistema (ciò che è sempre possibile) rispetto a da, db, dc e ricordando che l'elemento reciproco di x_a in D è espresso da $\frac{\partial D}{\partial x_a}$, otteniamo:

$$D\,da = \frac{\partial D}{\partial x_a} dx + \frac{\partial D}{\partial y_a} dy + \frac{\partial D}{\partial z_a} dz, \text{ ecc.}$$

Quindi

$$(12) \qquad D a_x = \frac{\partial D}{\partial x_a}, \text{ ecc.}$$

avendo posto, com'è chiaro,

$$a_x = \frac{\partial a}{\partial x}, \text{ ecc.}$$

Diciamo u, v, w le componenti all'istante t

della velocità del fluido nel posto x, y, z; cioè poniamo

(13) $$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = w.$$

Le a, b, c, t essendo assolutamente indipendenti, si ha, eseguendo la inversione nella derivazione,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial a}, \text{ ecc.}$$

Premesse queste relazioni, possiamo trasformare agevolmente la (11).

Infatti da (10) si ha

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial(u, y, z)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\partial(x, v, z)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\partial(x, y, w)}{\partial(a, b, c)}$$

per la regola di derivazione dei determinanti. Poi

$$\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial D}{\partial x_a} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial D}{\partial x_b} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial D}{\partial x_c}$$

$$= D\left(\frac{\partial u}{\partial a}a_x + \frac{\partial u}{\partial b}b_x + \frac{\partial u}{\partial c}c_x\right) = D\frac{\partial u}{\partial x},$$

in virtù delle (12). Quindi

(14) $$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

e però l'equazione di continuità si trasforma in questa

(15) $$\dot{\rho} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0;$$

e poichè

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}u + \frac{\partial \rho}{\partial y}v + \frac{\partial \rho}{\partial z}w$$

si ha pure

$$(16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \; ^{*}.$$

È facile interpetrare il secondo membro della (14). Infatti si ha

$$D = \lim_{\tau_0 = 0} \frac{\tau}{\tau_0};$$

e derivando logaritmicamente rispetto al tempo

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = \lim \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt}.$$

Il secondo membro esprime il rapporto limite tra la derivata del volume ed il volume τ e dicesi coefficiente di dilatazione cubica nel posto x, y, z all'istante t; indichiamolo con Θ, cioè poniamo

$$(17) \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \; ^{**}.$$

Se ρ è invariabile col tempo sarà, da (15),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

quindi $\Theta = 0$ e siamo appunto nel caso dei fluidi incompressibili.

§ 6. **Equazioni di Euler e di Lagrange.** — Nell'equazione di continuità compariscono le deri-

---

* Questa equazione e la (11) furon date da EULER rispettivamente nei: Mém. Ac. de Berlin (1755), pag. 284 e nei: Novi Comment. Ac. Petrop. **14**; (1759); pag. 369.

** *Teoria matem. d. equilibrio*, ecc. pag. 115.

vate di x, y, z rispetto alle coordinate iniziali a, b, c. Se quindi noi vogliamo seguire una determinata particella nel suo moto attraverso la massa fluida, occorre determinare le x, y, z, funzioni di t, a, b, c. Abbiamo dunque, senza ancora tener conto delle speciali condizioni al contorno, da risolvere un problema di integrazione di equazioni alle derivate parziali e però assai più difficile di quelli che si presentano nella ordinaria Dinamica. Giova ad ogni modo trasformare le equazioni (8), valide in ogni punto del fluido e perciò dette *indefinite*, in modo da far appunto figurare le derivate rispetto ad a, b, c.

Poniamo

$$\Pi = \int \frac{dP}{\rho}; \tag{18}$$

l'integrale potrà calcolarsi, in virtù della (9); quindi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; \text{ ecc.}$$

Moltiplicando le (8) rispettivamente per $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ e sommando si ha

$$\left\{ \begin{aligned} & \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial a} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial a} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial a} \\ & = X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \end{aligned} \right. \tag{19}$$

e due analoghe che si ottengono cambiando a in

b e *c*; e le quali sussistono anche quando *a*, *b*, *c* siano tre parametri qualunque atti a fissare la posizione iniziale del punto. Abbiamo inoltre

$$\rho\,|D| = \rho_0,$$

e quindi un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, che dicesi di LAGRANGE *.

Se le forze esterne derivano da un potenziale *U*, le (19) diventano

$$(20)\quad \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial a} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial a} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial (U + \Pi)}{\partial a} = 0;\ \text{ecc.}$$

Possiamo considerare il problema anche da un altro punto di vista; e proporci di determinare lo stato di moto del fluido in un determinato istante e luogo; cioè determinare *u*, *v*, *w* in funzione di *x*, *y*, *z*, *t*, riguardate ora come variabili indipendenti. In altre parole, ritenendo fisse le *x*, *y*, *z* (cioè fissando un punto in seno alla massa fluida) si cerca di determinare la velocità colla quale le varie molecole passano per quel punto, nella successione dei tempi. Trasformando, in questo senso, le (8), otteniamo una nuova forma detta di EULER **.

Ci si giunge facilmente perchè

$$\ddot{x} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},\ \text{ecc.}$$

---

* Furono date da EULER, Novi Comm. Ac. Petrop. **14**, (1759), pag. 376. LAGRANGE, Méc. Analy. **12**, pag. 273, 287.

** EULER, Mém. Ac. de Berlin (1755), pag. 286.

e quindi

$$(21)\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

e due analoghe dedotte con permutazioni circolari. Insieme con queste dobbiamo considerare l'equazione di continuità nella forma (15).

Si ottiene con ciò un sistema di equazioni (indefinite) alle derivate parziali del primo ordine. Però la definitiva risoluzione del problema esige ancora, ottenute le u, v, w, la integrazione del sistema

$$\dot{x}=u(x,\ y,\ z,\ t),\ \text{ecc.}$$

§ 7. **Integrali di Cauchy.** — Supposto che le forze esterne derivino da un potenziale, le equazioni (20) ammettono tre integrali. Derivando infatti la terza rispetto b, la seconda rispetto c e sottraendo, elimineremo U e Π; a primo membro avremo la somma di tre termini come questo:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t^2 \partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial^3 x}{\partial t^2 \partial c}\frac{\partial x}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right),$$

gli altri due si ottengono mutando x in y e z. Integrando si ha:

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)=A_0,$$

essendo A_0 funzione delle sole a, b, c. Ora notiamo che

$$\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}x_b+\frac{\partial u}{\partial y}y_b+\frac{\partial u}{\partial z}z_b\right)x_c$$
$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}x_c+\frac{\partial u}{\partial y}y_c+\frac{\partial u}{\partial z}z_c\right)x_b$$
$$=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial D}{\partial z_a}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial D}{\partial y_a},$$

perchè il coefficiente di $\frac{\partial u}{\partial y}$ è $y_b x_c - y_c x_b$, cioè l'elemento reciproco di z_a, cambiato di segno, in D. Dalla espressione precedente ne dedurremo altre due colle permutazioni circolari di u, v, w e x, y, z.

Quindi

$$A_0=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial D}{\partial x_a}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial D}{\partial y_a}$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial D}{\partial z_a}.$$

Poniamo ora

$$(22)\quad 2p=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad 2q=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad 2r=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

e quindi

$$(23)\qquad \frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0.$$

La relazione precedente e le analoghe che, collo stesso metodo, potrebbero dedursi dalle (20), diventano:

$$A_0=2\left(p\frac{\partial D}{\partial x_a}+q\frac{\partial D}{\partial y_a}+r\frac{\partial D}{\partial z_a}\right);\ \text{ecc.}$$

e queste, a loro volta, possono risolversi rispetto

p, q, r; basta moltiplicare per x_a, x_b, x_c e sommare: risulta

$$2pD = A_0 \frac{\partial x}{\partial a} + B_0 \frac{\partial x}{\partial b} + C_0 \frac{\partial x}{\partial c}; \text{ ecc.}$$

Di qui si ha subito un significato per A_0, B_0, C_0. Infatti per $t = t_0$ si ha $2p_0 = A_0$, ecc. onde infine

$$(24) \quad \begin{cases} pD = p_0 \dfrac{\partial x}{\partial a} + q_0 \dfrac{\partial x}{\partial b} + r_0 \dfrac{\partial x}{\partial c}, \\ qD = p_0 \dfrac{\partial y}{\partial a} + q_0 \dfrac{\partial y}{\partial b} + r_0 \dfrac{\partial y}{\partial c}, \\ rD = p_0 \dfrac{\partial z}{\partial a} + q_0 \dfrac{\partial z}{\partial b} + r_0 \dfrac{\partial z}{\partial c} \text{ *.} \end{cases}$$

Queste tre relazioni invero contengono ancora delle derivate seconde; ma, essendo relazioni diverse dalle (20), possiamo valercene per eliminare alcune di queste derivate seconde; in questo senso agevolano la integrazione delle (20), di cui sono da ritenersi per veri e propri integrali.

§ 8. **Interpetrazione degli integrali di Cauchy e rappresentazione geometrica della rotazione.** — Siano u', v', w', i valori di u, v, w all'istante t, ma pel punto $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$; cioè in un punto le cui coordinate relative ad una terna col

---

* CAUCHY, *Sur la théorie des ondes,* Mem. d. Sav. étrangers (1815). Œuvres compl. I (1), pag. 38.

centro in $M(x, y, z)$, siano ξ, η, ζ. Avremo

$$u' = u(x+\xi, \ldots, t)$$
$$= u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta + \cdots; \text{ ecc.}$$

Supponiamo inoltre scelto il punto (ξ, η, ζ) in un intorno conveniente di M, per modo che possa ritenersi solamente

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta; \text{ ecc.}$$

Pongasi (con altro significato per le a, b, c)

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

tenendo ancora presenti le (22), abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}h - r, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}g + q; \text{ ecc.}$$

e quindi

$$u' = u + q\zeta - r\eta + a\xi + \tfrac{1}{2}h\eta + \tfrac{1}{2}g\zeta; \text{ ecc.}$$

dove i valori di u, v, w, p, ... a, ... f, ... si riferiscono tutti al punto $M(x, y, z)$.

Poniamo finalmente

$$2\Phi = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + f\eta\zeta + g\zeta\xi + h\xi\eta$$

ed otterremo:

$$u' = u + q\zeta - r\eta + \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \quad v' = v + r\xi - p\zeta + \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$$
$$w' = w + p\eta - q\xi + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}.$$

La velocità, all'istante t, di un punto dell'intorno di M considerato, può dunque riguardarsi come risultante di due altre: la prima, le cui componenti sono

$$u + q\zeta - r\eta, \quad v + r\xi - p\zeta, \quad w + p\eta - q\xi,$$

corrisponde ad un moto di corpo rigido: (u, v, w) sono le componenti della velocità istantanea di traslazione: p, q, r quelle della velocità istantanea di rotazione. Ecco dunque ottenuta la interpetrazione di queste tre grandezze. La seconda velocità ha per componenti le derivate di Φ e però risulta normale alla quadrica $\Phi =$ cost. il cui centro è in M. Se non esistesse che questa velocità, non avremmo nè traslazione dell'intorno di M, nè velocità di rotazione, perchè M è il solo a restar fisso; tale velocità è dunque unicamente dovuta al moto intestino dell'intorno.

Il vettore Ω, coll'origine in M e le cui componenti sono p, q, r, si dice rotazione del fluido in M nell'istante t; ed è facile vedere che esso ha carattere invariantivo rispetto ad ogni terna ortogonale uscente da M.

In generale poi è da osservare che le u, v, ... r non rappresentano le coordinate del moto istantaneo dell'intorno di M, se questo ad un tratto diventasse rigido *.

---

* Vedi su questo § il Cap. 3° della *Teoria matematica*, ecc. § 4.

§ 9. **Moto non vorticoso. Potenziale di velocità.** — Si dice che nel moto di un fluido v'è un potenziale di velocità, se esiste una funzione $\varphi(x, y, z, t)$ tale che

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

La rotazione in ogni punto è nulla e il moto dicesi anche *non vorticoso.* Ha luogo il seguente teorema di LAGRANGE:

Se in un istante qualunque esiste un potenziale di velocità, esisterà sempre; od anche: *se in un istante qualunque è nulla la rotazione, è nulla sempre: e se non è nulla in un certo istante non sarà nulla mai* *.

Gl'integrali di CAUCHY ne dànno la dimostrazione semplice e rigorosa; perchè, come vedremo subito, le forze derivano da un potenziale.

Infatti se per $t = 0$, $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, sarà sempre $p = q = r = 0$ e quindi, per le (22),

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi \; {}^{**}.$$

Se ad esempio il fluido è inizialmente in riposo, esiste per $t = 0$ il potenziale di velocità, essendo $u_0 = v_0 = w_0 = 0$; però esisterà per ogni altro valore di t.

---

*) *Mémoire sur la Théorie du mouvement des fluides.* Ac. Roy. de Berlin, 1781. Œuvres compl. 4, p. 716.

** CAUCHY, mem. citata; pag. 41.

In tal caso il problema del moto si riduce alla ricerca di φ, ρ, P. Osserviamo che il primo membro della (21) si trasforma in

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}, \text{ ecc.}$$

Dunque è necessario che anche le forze esterne ammettano un potenziale: sia U; posto

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + U + \Pi$$

le equazioni (21) diventano semplicemente

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

quindi

$$V = f(t)$$

essendo f una funzione arbitraria del tempo, la quale può supporsi compenetrata in φ, di cui, pel calcolo di u, v, w, non occorrono che le derivate rispetto x, y, z; quindi

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \\ &\qquad\qquad + U + \Pi = 0. \end{aligned} \right.$$

L'equazione (15) inoltre ci dà

$$(26) \quad \rho\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

La (25) tiene in certo modo luogo, in questo caso, dell'integrale della conservazione dell'energia;

e tra (25) e (26) occorre eliminare ρ (che figura anche in Π) e poi tener conto delle condizioni al contorno, varie a secondo dei problemi, e sulle quali non possiamo intrattenerci.

Nel caso dei fluidi incompressibili $\Pi = \frac{1}{\rho} P$ e quindi si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + U + \frac{1}{\rho} P = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Supponiamo che il moto sia stazionario; cioè u, v, w, variabili da punto a punto, non varino però col tempo e consideriamo un liquido pesante che partendo dalla quiete fluisca da un'apertura del vaso in cui è racchiuso. Se V è la velocità del liquido, si ha

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\rho} P + g z = \text{cost.}$$

Sia z_0 l'altezza del livello; per z_0, V è nulla o assai piccola e la pressione è quella atmosferica. Per un punto dell'apertura invece la z sia nulla e la pressione la stessa: avremo dunque

$$\frac{1}{\rho} P + g z_0 = \text{cost.}, \qquad \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\rho} P = \text{cost.}$$

donde

$$V^2 = 2 g z_0$$

che esprime il teorema di TORRICELLI *.

Si deduce ancora che

$$P = P_0 - \rho g (z - z_0) - \frac{1}{2} V^2,$$

mentre che nello stato di equilibrio (§ 2) si è trovato:

$$P = P_0 - \rho g (z - z_0):$$

dunque la pressione nello stato di moto (idraulica) è minore di quella allo stato di riposo (idrostatica).

§ 10. **Moto vorticoso. Linee verticali e vortici.** — Quando non esiste il potenziale di velocità il moto dicesi *vorticoso*.

Sia M una molecola fluida al tempo t; essa sarà dotata di una velocità istantanea di rotazione ω e sia Ω il vettore di questa rotazione: su questo, sempre al tempo t, considero un'altra molecola M' infinitamente prossima ad M e di M' il vettore Ω' relativo; e così di seguito. Verremo a costruire una linea curva le cui tangenti in ogni punto dànno la direzione dell'asse di rotazione istantaneo, relativo alla particella che trovasi nel punto di contatto.

Tali linee furono chiamate da HELMHOLTZ, linee *vorticali* **.

---

* TORRICELLI, *De motu gravium naturaliter accelerato*, Firenze (1643). Vedi pure MACH, l. c., pag. 391.

** *Ueber Integrale d. hydr. Gleich. welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, Wiss. Abhand. I (1858).

Le equazioni differenziali di queste linee sono

$$dx : dy : dz = p : q : r; \tag{27}$$

colla integrazione si introducono due costanti arbitrarie e però le linee suddette, per ogni valore di t, costituiscono una serie ∞^2.

Poichè la divergenza di Ω per la (23) è nulla, in virtù di un teorema già applicato (Cap. 5°, § 8) si conclude che cognito un integrale delle (27), l'altro si determina con una quadratura.

Nell'interno della massa fluida consideriamo un'area qualunque e per ogni suo punto costruiamo la linea vorticale, pienamente determinata. Il fascio di tutte queste linee chiamasi *vortice* o *vorticoide;* se l'area primitiva è infinitesima il vortice dicesi *elementare*.

Consideriamo lo spazio τ compreso tra un fascio di linee vorticali e (superiormente ed inferiormente) da due aree qualunque σ_0 e σ_1. Poichè la divergenza di Ω è nulla in τ, così per un teorema noto (Cap. 6°, § 6) sarà

$$\int \omega_n \, d\sigma = 0$$

in cui ω_n è la componente di Ω secondo la normale interna alla superficie σ che racchiude τ. Ma sul fascio di linee vorticali Ω è diretto secondo la tangente e quindi la sua componente normale è nulla. Dunque abbiamo

$$\int \omega_{n_0} d\sigma_0 = \int \omega_{n_1} d\sigma_1$$

in cui n_0 ed n_1 sono le normali a σ_0 e σ_1, prese in senso concorde. Supponiamo ora che il vortice sia elementare e che σ_0 e σ_1 siano ortogonali alle linee vorticali; allora ω_{n_0} coincide col valore di ω in σ_0; e però la precedente relazione ci dà

$$\omega_0 \sigma_0 = \omega_1 \sigma_1;$$

cioè per ogni sezione retta di un vortice elementare si ha

$$\omega \sigma = \text{cost.}$$

Chiamando *portata di un vortice elementare* il prodotto della velocità di rotazione per la sezione retta, il risultato precedente si esprime così:

La portata di un vortice elementare è costante.

Poichè $\omega \neq 0$, partendo da un'area σ_0 diversa da zero, sarà pure diversa da zero la costante e quindi sempre $\sigma \neq 0$; onde *un vortice non può mai terminare*: cioè *o termina alla superficie del fluido, o ha forma anulare, o continua indefinitamente in seno alla massa fluida.*

Finora abbiamo considerate le linee vorticali per un determinato istante.

Consideriamo ora la posizione iniziale $M_0(a, b, c)$ di una molecola che al tempo t occupa la posizione $M(x, y, z)$. Siano ω_0 ed ω le rispettive velocità istantanee di rotazione.

Per la linea vorticale uscente da M_0 avremo

$$\frac{da}{p_0} = \frac{db}{q_0} = \frac{dc}{r_0} = \frac{ds_0}{\omega_0},$$

in cui da, db, dc sono gli accrescimenti che subiscono a, b, c allorchè da M_0 si passa in M'_0 sulla linea vorticale il cui arco elementare è ds_0. Se al tempo t, M_0 ed M'_0 sono venuti in M ed M' la prima delle (24) ci dà

$$pD = \frac{\omega_0}{ds_0}\left(\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc\right) = \frac{\omega_0}{ds_0}dx, \text{ ecc.}$$

onde:

$$p : q : r = dx : dy : dz.$$

le quali esprimono che M' si trova sul vettore Ω; cioè M' fa ancora parte della linea vorticale di M.

L'asse di rotazione relativo ad M_0, per $t = 0$, diventa l'asse di rotazione relativo ad M e le molecole che stanno su di un vortice vi restano sempre *.

I risultati precedenti ricevono una conferma nella nota esperienza degli anelli di fumo del TAIT **.

---

* Tutti i teoremi esposti sono di HELMHOLTZ, mem. cit. e costituiscono quindi la più bella interpetrazione degli integrali di CAUCHY.

** Cfr. TAIT, *Conférences sur quelques-uns des progrès*, etc. Paris (1887), p. 374. BRILLOUIN, *Recherches récentes sur diverses questions de l'Hydrodynamique*, Paris (1897).

Esercizi.

1. Equilibrio di un liquido pesante che ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.

Il potenziale delle forze centrifughe composte è

$$-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

se ω è la velocità di rotazione; le forze esterne debbono in generale ammettere un potenziale U, e l'equazione delle isobariche è

$$U+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=\text{cost.}$$

Nel caso del liquido omogeneo ($\rho=1$) pesante $U=g\,z$ e la superficie libera è

$$z=c-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2);$$

paraboloide rotondo ad asse verticale. La costante c si determina conoscendo il volume del liquido contenuto in un vaso. Se questo p. es., ha forma di un cilindro circolare di raggio a, e b è l'altezza del liquido in quiete, si ha

$$\pi a^2 b=2\pi\int_0^a z\,r\,d\,r,$$

donde

$$c=b+\frac{\omega^2 a^2}{4g},$$

però

$$z=b+\frac{\omega^2 a^2}{4g}-\frac{\omega^2}{2g}r^2.$$

Posto $\frac{\omega^2}{2g}=\frac{h}{a^2}$, z ha il valor massimo $b+\frac{1}{2}h$ per $r=0$ ed il minimo $b-\frac{1}{2}h$ per $r=a$.

2. Stesso problema supponendo che le mo-

lecole del liquido si attraggano in ragion diretta della distanza.

In un punto $M(x, y, z)$ la forza ha per componenti

$$k \sum m x' - k x \sum m, \text{ ecc.}$$

cioè, se μ è la massa, ξ, η, ζ le coord. del centro di massa,

$$k \mu (\xi - x), \ldots$$

derivanti dal potenziale

$$k \mu [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2];$$

onde, come prima,

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 - \frac{\omega^2}{k \mu}(x^2 + y^2) = c.$$

Se $\xi = \eta = \zeta = 0$

$$z^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{k \mu}\right)(x^2 + y^2) = c;$$

ellissoidi o iperboloidi di rotazione. Questo secondo caso è solo possibile per liquidi di un vaso, mentre la figura ellissoidale è possibile anche per liquido libero. Se $1 - \frac{\omega^2}{k\mu} = \varepsilon$, gli assi di ellissoide sono $\sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}$, $\sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}$, $\sqrt{c}$; onde dall'espressione $V = \frac{4}{3} \pi \frac{c \sqrt{c}}{\varepsilon}$ del volume si determina c.

[POISSON, *Traité de Méc.*, **2**, pag. 550].

3. Una sfera omogenea esercita un'attrazione secondo la legge di NEWTON e ruota uniformemente intorno ad un diametro; figura di equilibrio di un sottile strato liquido deposto sulla sfera.

Il potenziale dell'attrazione della sfera (Cap. 6°, § 2) è $\frac{M}{r}$ se M è la sua massa e r la distanza di un punto dello strato dal centro; onde

$$\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = c$$

è l'equazione delle isobariche (di rotazione intorno z); se quella corrispondente al valor c taglia l'asse alla distanza a dal centro, si ha $c = \frac{M}{a}$ e quindi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{a\,\omega^2}{2M} t^2\right), \quad t^2 = x^2 + y^2.$$

Poichè $r = \sqrt{t^2 + z^2} = a\left(1 + \frac{a\,\omega^2}{2M} t^2\right)$, trascurando le potenze di $\frac{a\,\omega^2}{2M}$, risulta

$$\frac{z^2}{a^2} + t^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a\,\omega^2}{M}\right) = 1$$

equazione di uno sferoide schiacciato. Se a_1 è il raggio equatoriale si ha

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{a^3\,\omega^2}{M}\right)^{\frac{1}{2}},$$

e quindi lo schiacciamento è dato da

$$\frac{a_1 - a}{a} = \frac{a^3\,\omega^2}{2M} = \frac{a\,\omega^2}{2g}$$

dove $g = \frac{M}{a^2}$ è la gravità al polo. In un altro punto qualunque $g = -\frac{dV}{dr}$ cioè

$$g = \frac{M}{r^2} - \omega^2 r \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Posto $r = a(1 + u)$, abbiamo

$$g = \frac{M}{a^2}(1 - 2u) - \omega^2 a \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Ma

$$\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = c,$$

onde

$$\frac{M}{a}(1-u)=c-\frac{1}{2}\omega^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad u=\frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{M}\operatorname{sen}^2\theta.$$

$$g=\frac{M}{a^2}\left(1-\frac{2\,\omega^2 a^3}{M}\operatorname{sen}^2\theta\right).$$

[THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, § 802, pag. 372].

4. Lo stesso problema supponendo che un altro corpo di massa M_1, a distanza d dal centro, attragga lo strato liquido con la legge di NEWTON, la sfera essendo fissa.

Come nell'esercizio precedente avremo

$$\frac{M}{r}+\frac{M_1}{\sqrt{d^2-2\,r\,d\cos\theta+r^2}}=\text{cost.}$$

Se il rapporto $\frac{r}{d}$ è molto piccolo, posto ancora $r=a(1+u)$, risulta

$$\frac{M}{a}(1-u)+\frac{M_1}{d}\left(1+\frac{a}{d}\cos\theta\right)=c$$

e quindi

$$\frac{M}{a}+\frac{M_1}{d}=c, \quad u=\frac{M_1 a^2}{M d^2}\cos\theta.$$

Nel punto A (in cui $\theta=0$) si ha elevazione di livello; $\varepsilon=\frac{M_1 a^2}{M d^2}$, e nel punto diametralmente opposto ($\theta=-\pi$) una eguale depressione. Nel caso della terra (M) e della luna (M_1), avendosi circa

$$M_1=\frac{1}{83}M, \quad d=60\,a,$$

risulta

$$\varepsilon=\frac{1}{83.60^2}=\frac{1}{3.10^5}.$$

Nel caso di due corpi di massa $\frac{1}{2}M_1$ simmetrici rispetto al centro, si ha

$$\frac{M}{r}+\frac{M_1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}}+\frac{1}{\sqrt{d^2+2rd\cos\theta+r^2}}\right]=c$$

e quindi, come prima,

$$u=\frac{1}{2}\frac{M_1 a^3}{M d^3}(3\cos^2\theta-1).$$

La figura libera è uno sferoide coll'asse maggiore lungo la congiungente i due corpi.

[THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, § 803, 804, p. 373, 374].

5. Data la massa totale M di un fluido omogeneo ed incompressibile, di densità uno, animato da un moto di rotazione uniforme intorno asse z, nell'ipotesi che le sue parti si attraggano secondo la legge di NEWTON; si domanda la figura di equilibrio relativo supponendo che in superficie si eserciti una pressione costante e che la massa stessa si comporti come se fosse rigida.

Dovremo avere

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 x\right)dx+\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\omega^2 y\right)dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=0$$

se V è la funzione potenziale. Sia $\Phi(x, y, z)=0$ l'equazione della superficie del fluido, avremo pure

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0.$$

e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 x:\frac{\partial V}{\partial y}+\omega^2 y:\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}:\frac{\partial \Phi}{\partial y}:\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

La funzione Φ deve soddisfare a queste equazioni; mentre occorre la conoscenza di Φ per formare V. Il problema è quindi assai complicato e si sa risolvere soltanto in pochi casi.

Vediamo se è possibile che Φ abbia la figura di un ellissoide, allora

$$\Phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

e $$V_i = \text{cost.} - A\,x^2 - B\,y^2 - C\,z^2$$

(Cap. 6°, § 4, form. 11); le condizioni precedenti si riducono alle

$$\left(A - \frac{\omega^2}{2}\right) a^2 = \left(B - \frac{\omega^2}{2}\right) b^2 = C\,c^2$$

cioè, eguagliando i due valori di ω^2,

$$(b^2 - a^2) \int_0^\infty \frac{d\,u}{(a^2+u)(b^2+u)\sqrt{U}} = \frac{c^2(b^2-a^2)}{a^2\,b^2} \int_0^\infty \frac{d\,u}{(c^2+u)\sqrt{U}}.$$

A questa può soddisfarsi con $a = b$ (ellissoide di rotazione di MACLAURIN); oppure con

$$\int_0^\infty \frac{u}{U^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{u}{a^2\,b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right] d\,u = 0,$$

cui corrisponde un ellissoide a tre assi disuguali, detto di JACOBI [Ges. Werke, **2**, p. 19 (1834)]. Per questo notiamo solamente che deve essere

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$$

onde $c < a$ e $c < b$; l'ellissoide ruota intorno asse minore. Accenniamo la discussione del primo ellissoide. Poichè

$$\frac{\omega^2}{2\,\pi} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \int_0^\infty \frac{u\,d\,u}{\left(1 + \frac{u}{a^2}\right)^2 \left(1 + \frac{u}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

risulta $c < a$: l'ellissoide è schiacciato.

Posto $\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$, e cambiato u in $c^2\,u$ nell'integrale, risulta

$$\frac{\omega^2}{2\,\pi} = \varphi(\lambda) = \lambda^2 \int_0^\infty \frac{u\,d\,u}{(1 + \lambda^2 + u)^2 (1 + u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Colla sostituzione $1 + u = v^2$ l'integrale si trasforma in

$$2\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_1^{\infty}\frac{dv}{(v^2+\lambda^2)^2}-2\int_1^{\infty}\frac{dv}{v^2(v^2+\lambda^2)}.$$

Ma il secondo ha per valore $\frac{1}{\lambda^2}-\frac{\operatorname{arctg}\lambda}{\lambda^3}$; poscia derivando $\int_1^{\infty}\frac{dv}{v^2+\lambda^2}=\frac{\operatorname{arctg}\lambda}{\lambda}$, rispetto λ, si ottiene il valore del primo; per cui

$$\varphi(\lambda)=\frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda-3\lambda}{\lambda^3}.$$

Una tabella dei valori di $\varphi(\lambda)$ corrispondenti a vari valori di λ è data da THOMSON, l. c., **2**, pag. 327; $\varphi(\lambda)$ è costantemente positiva e si annulla per $\lambda=0, \infty$. La sua derivata prima è della forma

$$\varphi'(\lambda)=\frac{\lambda^2+9}{\lambda^4}\varphi_1(\lambda), \text{ con } \varphi_1(\lambda)=\frac{7\lambda^2+9\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)}-\operatorname{arctg}\lambda.$$

Di qui

$$\varphi_1'(\lambda)=\frac{8\lambda^4(3-\lambda^2)}{(\lambda^2+1)^2(\lambda^2+9)^2},$$

e quindi positiva per

$$0<\lambda<\sqrt{3}.$$

φ_1 si annulla per $\lambda=0$; cresce col crescere di λ sino a $\sqrt{3}$ in cui è massima; poi decresce continuamente fino a $\lambda=\infty$ in cui diventa $-\frac{\pi}{2}$.

E però φ_1 ammette una sola radice reale $\lambda'>\sqrt{3}$; e finalmente φ si annulla per $\lambda=0$; cresce col crescere di λ e per $\lambda=\lambda'$ assume il suo valor massimo: poi decresce sino ad annullarsi per $\lambda=\infty$.

Il valore λ' radice della $\varphi_1(\lambda)=0$ si trova coi metodi noti di approssimazione (cfr. BESANT a. RAMSEY, l. c., pagina 227) ed è $\lambda'=2{,}5293$: quindi $\varphi(\lambda')=0{,}22467$.

L'equazione

$$\varphi(\lambda)=h$$

con $h = \frac{\omega^2}{2\pi}$ $\left(\text{e } \frac{\omega^2}{2\pi f \rho}\right.$ se non si fosse supposta eguale ad uno la densità e la costante di gravitazione$\left.\right)$ ha due radici reali e distinte λ_1, λ_2 tali che

$$0 < \lambda_1 < \lambda' < \lambda_2$$

se $h < \varphi(\lambda')$; coincidono se $h = \varphi(\lambda')$ e sono immaginarie se $h > \varphi(\lambda')$.

Data la velocità ω si trova h e quindi λ: poscia le due equazioni

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 c, \qquad \lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

ci faranno conoscere a e c. Dunque se $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} \gtreqless 0{,}22467$ si ha nessuno, uno, o due ellissoidi di MACLAURIN.

Nel caso della terra $\frac{\omega}{2\pi f \rho} = 0{,}0023$ e quindi si hanno due figure ellissoidali, corrispondenti alle radici di $\varphi(\lambda) = 0{,}0023$; ma una di queste, che è 681, darebbe $\frac{a}{c} = \sqrt{1 + \lambda^2} = 681$ circa; ciò è impossibile. Si ha dunque una sola figura di equilibrio per la quale

$$\frac{a - c}{c} = \frac{1}{232};$$

le misure dirette dànno circa $\frac{1}{293}$.

Assai più complicata è la discussione dell'ellissoide di JACOBI. La discussione completa dà i risultati che qui riassumiamo.

Consideriamo i numeri

$$0{,}18709; \qquad 0{,}22467.$$

Per valori di h minori del più piccolo, abbiamo un ellissoide di JACOBI e due di MACLAURIN; per h compreso tra

quei due numeri, due di MACLAURIN e finalmente per h maggiore del più grande, nessun ellissoide.

Tale ricerca è fondata sulla forma relativamente semplice di V per l'ellissoide; se supponiamo l'ellissoide non omogeneo, ma stratificato omogeneamente come al § 4, Cap. 6°, sappiamo assegnare, in modo semplice la forma di V; e quindi potremmo proporci lo stesso problema per un tale ellissoide. Si dimostra che in tali ipotesi non sono possibili configurazioni di equilibrio [VOLTERRA, Acta Mathem., **27**, pag. 105 (1904)].

I lavori più completi sull'argomento si debbono: al Prof. LIAPUNOFF, *Sulla stabilità delle figure ellissoidali*, ecc. (1884). [Vedi la recente traduzione francese negli Annales de la Fac. d. Sciences de Toulouse (1904)]; ed al POINCARÉ, il quale ha dimostrato che gli ellissoidi non sono le sole figure di equilibrio e che esiste una serie infinita di figure di equilibrio, simmetriche rispetto ad un piano normale all'asse di rotazione e aventi un certo numero di piani di simmetria passanti per l'asse: una di queste è certamente stabile, ecc. [Acta Mathem., **7**, pag. 259 (1885) ed anche *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris (1903), Cap. VII. Vedi pure TISSERAND, *Traité de Méc. cél.*, **2**, pag. 98].

6. Dimostrare che se $h > 1$, nell'ipotesi dell'esercizio precedente, l'equilibrio non è possibile.

Posto

$$W = f V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

le componenti della forza sono $-\frac{\partial W}{\partial x}$, ecc. Il teorema della divergenza dà

$$\int \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \dots \right) d\tau = - \int F_n \, d\sigma$$

cioè:

$$\int \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) d\tau + \int \frac{dW}{dn} d\sigma = 0.$$

Ma

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \cdot \cdot = - 4 \pi f \rho + 2 \omega^2,$$

(Cap. 6°, § 6) però

$$2(\omega^2 - 2 \pi f \rho) \int d\tau = - \int \frac{dW}{dn} d\sigma.$$

Si conclude che nella fatta ipotesi

$$\int \frac{dW}{dn} d\sigma < 0,$$

e però $\frac{dW}{dn}$ è in qualche punto di σ negativa; l'equilibrio non può sussistere.

[Poincaré, mem. cit.; *Figures d'èquilibre*, etc. pag. 11].

7. Determinare le condizioni di equilibrio di un prisma retto triangolare, omogeneo e pesante immerso in un liquido pure omogeneo, pesante, per modo che gli spigoli laterali siano orizzontali ed uno solo immerso.

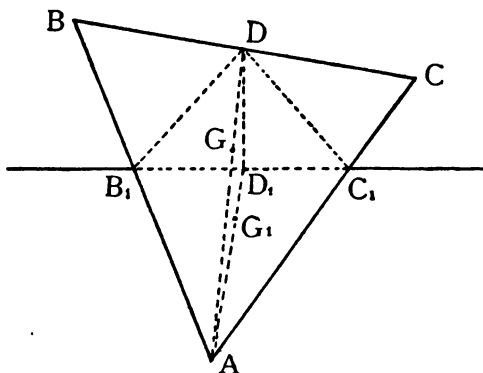
Basterà considerare la sezione del prisma con un piano normale agli spigoli. Sia h l'altezza del prisma (Fig. 22), ρ_1 la sua densità, ω_1 l'area della base; ω quella della sezione immersa, ρ la densità del liquido. Poichè $g \rho_1 \omega_1 h$ e $g \rho \omega h$ rispettivamente rappresentano il peso del corpo e quello del fluido spostato, posto

$$AB = c, \quad AC = b, \quad AB_1 = x, \quad AC_1 = y$$

risulta

$$x y = \frac{\rho_1}{\rho} a b.$$

Siano G e G_1 i centri di massa delle aree ABC, AB_1C_1; la GG_1, verticale, è normale alla superficie del liquido; ma è inoltre parallela a DD_1 (congiungente i punti medi di BC e B_1C_1) dunque DD_1 è normale a B_1C_1 e quindi $DB_1 = DC_1$, e reciprocamente.

Posto ancora $AD = m$, e detti α e β gli angoli DAB e DAC, risulta

(Fig. 22)

$\overline{DB}_1^2 = x^2 - 2mx\cos\alpha + m^2 = y^2 - 2my\cos\beta + m^2$
cioè

$$x^2 - y^2 = 2m(x\cos\alpha - y\cos\beta).$$

Si discute facilmente il caso di $a = b$, ecc.

8. Condizioni di stabilità di un corpo galleggiante.

Sia xy una sezione del corpo ed x, y gli assi d'inerzia relativi al centro di massa O (origine). Per y conduciamo un piano che formi colla sezione un angolo θ assai piccolo. Un punto P del piano xy si sarà elevato di θx, e se $d\sigma_1$ è un elemento d'area intorno P, il volume del prisma elementare è $\theta x d\sigma_1$; quindi il volume dell'unghia solida a destra $v_1 = \theta \int x d\sigma_1$, e il volume di quella a sinistra è $v_2 = -\theta \int x d\sigma_2$; quindi

$$v_1 - v_2 = \theta \int x \, d\sigma = 0,$$

cioè i due volumi v_1 e v_2 sono eguali. I centri di massa di questi volumi omogenei abbiano per ordinate η_1 ed η_2. Avremo

$$v_1 \eta_1 = \theta \int x \, y \, d\sigma_1, \qquad v_2 \eta_2 = - \theta \int x \, y \, d\sigma_2$$

onde

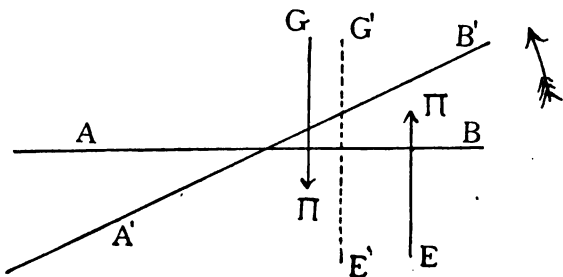
$$v_1 \eta_1 - v_2 \eta_2 = \theta \int x \, y \, d\sigma = 0$$

e quindi $\eta_1 = \eta_2$; cioè i centri di massa giacciono in uno stesso piano normale ad y. Finalmente il momento del peso di ciascuno dei due volumi intorno y è

$$\theta g \int x \, . \, x \, d\sigma_1 = \theta g \int x^2 \, d\sigma_1 .$$

Ciò posto, ricordiamo che per la stabilità dell'equilibrio, si devono considerare dei movimenti del galleggiante rispetto al liquido. Qualunque spostamento del corpo si può decomporre in tre traslazioni secondo due assi orizzontali e uno verticale, e tre rotazioni. Trattandosi di corpi pesanti non dovremo occuparci nè di traslazioni intorno ad assi orizzontali, nè di rotazioni intorno ad asse verticale, il cui lavoro è nullo. In quanto alle traslazioni lungo la verticale se esse sono dirette verso il basso, mentre il peso del corpo resta lo stesso, la spinta idrostatica cresce e viceversa: per questi movimenti l'equilibrio è stabile. Dunque resteranno da considerare le rotazioni intorno a due assi orizzontali, che potremo sempre supporre sulla superficie del fluido (Vol. 1°, pag. 70): siano precisamente i due assi principali della sezione di affioramento, e facciamo effettuare a questa una piccola rotazione θ intorno ad uno degli assi.

Con ciò i centri di gravità G' ed E' (Fig. 23) del corpo e del fluido spostato verranno in G ed E. Il peso Π del corpo è applicato in G; la pressione del fluido in E è eguale

e contraria a Π; ma va corretta della pressione dovuta al volume $A I A'$ immerso (diretta in alto) e di quella dovuta

(Fig. 23)

al volume $B I B'$ emerso (diretta in basso). Queste sono eguali e costituiscono una coppia il cui momento è $\theta g \rho \varkappa^2 A$ (A area d'affioramento, $\varkappa$ raggio d'inerzia intorno asse di rotazione, ρ densità del fluido); coppia che giace in un piano normale all'asse di rotazione e che agisce in senso contrario alla rotazione. Posto $GE = h$, la coppia in G ed E ha per momento $\Pi h \theta$ ed ha stesso senso della rotazione: però il momento totale delle due coppie è

$$\theta (\Pi h - g \rho \varkappa^2 A) = \theta g \rho (V h - \varkappa^2 A)$$

perchè il volume V del fluido spostato è tale che $\Pi = V g \rho$. L'equilibrio è stabile se la coppia risultante ha per effetto di opporsi alla rotazione cioè se (essendo $\theta > 0$) $V h < \varkappa^2 A$ e quindi

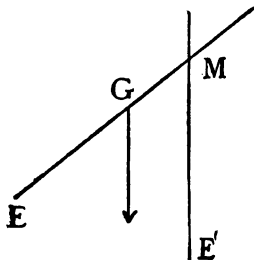
$$h < \frac{\varkappa^2 A}{V}.$$

Perchè l'equilibrio poi sia stabile rispetto a rotazioni intorno l'altro asse deve essere

$$h < \frac{\varkappa'^2 A}{V};$$

e se le due condizioni sono verificate contemporaneamente,

l'equilibrio è assolutamente stabile. Se G è al disotto di E, h deve considerarsi come negativo: l'equilibrio è sempre stabile.

Nel caso di un corpo simmetrico, considerando spostamenti pei quali V non varia, anche G (teorema centro di massa) non varia; E venga in E' in cui sarà applicata la spinta verso l'alto. Se quindi M cade al *disopra* di G, essa spinta tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio che quindi è stabile; se M cade al disotto di G, è invece instabile (Fig. 24). Il primo caso accadrà certamente se G cade sotto E. La posizione limite di M dicesi *metacentro;* la sua distanza da E è data da $\varkappa^2 A : V$. Si può anche dire che M è il centro di curvatura della curva descritta da E.

(Fig. 24)

(THOMSON a. TAIT, l. c., **2**, § 766, pag. 322-4 e per ampi particolari, anche bibliografici, APPELL, l. c., **3**, pag. 188. GREENHILL, l. c., pag. 148, art. 94-125).

9. Condizioni di stabilità di un cilindro (o cono) circolare retto immerso verticalmente in un liquido omogeneo.

La densità del liquido sia 1; ρ quella del solido; a il raggio della base, l l'altezza. Nel caso del cilindro si trova subito che la distanza (dalla base immersa) della sezione di affioramento è

$$l' = l\rho.$$

Inoltre $\varkappa^2 = \frac{a^2}{4}$, e la condizione di stabilità è

$$\left(\frac{a}{l}\right)^2 > 2\rho(1-\rho).$$

Nel caso del cono, il vertice sia in basso e sia x la distanza, dal vertice, della sezione d'affioramento. Poichè i raggi della base e di questa sezione stanno tra loro come l sta ad x, così avremo

$$x^3 = \rho\, l^3 .$$

Inoltre

$$EG = \frac{3}{4}(l - x); \; EM = \frac{Ax^2}{V} = \frac{\pi y^2 . \frac{1}{4} y^2}{\frac{1}{3}\pi y^2 x} = \frac{3}{4}\frac{y^2}{x}$$

dove y è il raggio della sezione d'affioramento eguale ad $x \operatorname{tang} \alpha$ (α la semiapertura del cono): onde $EM = \frac{3}{4} x \operatorname{tang}^2 \alpha$, la quale dà subito una semplice costruzione del metacentro. Da E si conduce, in un piano meridiano, la parallela a sezione fino ad incontrare il lato, e dal punto d'incontro si conduce la normale al lato sino ad incontrare l'asse. Per la stabilità occorre che

$$x \operatorname{tang}^2 \alpha > l - x$$

cioè

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{a^2}{l^2} > \left(\frac{1}{\rho}\right)^3 - 1.$$

(GREENHILL, l. c., pag. 197, art. 130).

10. Una superficie piana è immersa in un fluido pesante; trovare il centro di pressione.

Dicesi così il centro delle pressioni (forze parallele) che il fluido esercita normalmente su ogni elemento di area. Sia questa riferita ad un sistema x, y: allora, dette ξ, η coordinate centro pressione

$$\xi = \frac{\int P x \, d\sigma}{\int P \, d\sigma}, \text{ ecc. ma } P = P_0 + g \rho \zeta$$

e spostando l'origine si ha

$$\xi = \frac{\int x z \, d\sigma}{\int z \, d\sigma}, \quad \eta = \frac{\int y z \, d\sigma}{\int z \, d\sigma}.$$

Se l'asse y è intersezione di piano con superficie libera allora $x \equiv z$; quindi

$$\xi = \frac{\int x^2 \, d\sigma}{\int z \, d\sigma} = \frac{k^2}{\xi_1}$$

se k è il raggio d'inerzia secondo y, e ξ_1 l'ascissa del centro di massa di area.

Il centro di pressione coincide col centro di percussione o oscillazione dell'area piana, l'asse y essendo l'asse di sospensione. (Cap 5°, § 5).

11. Un fluido indefinito incompressibile avvolge una sfera fissa; il moto non è vorticoso e all'infinito la velocità ha un limite fisso. Determinare il potenziale di velocità.

Il potenziale φ soddisfa all'esterno della sfera (di raggio a) alla

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

ed è monodromo. Se A è il limite a cui tende la velocità all'infinito, potendo scegliere z parallelo e di senso contrario ad A, avremo che per $x = y = z = \infty$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -A.$$

La velocità del fluido sulla superficie sferica è tutta tangenziale; quindi, se r è la distanza di un punto dal centro, si ha

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0.$$

Tutte queste condizioni individuano il potenziale φ. Posto

$$\psi = \varphi + A z$$

risulta ancora $\Delta_2 \psi = 0$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=a} = A \frac{z}{a}$, mentre all'infinito le derivate di ψ sono nulle. Ora si osservi che $\Delta_2 \frac{1}{r} = 0$ e ancora $\Delta_2 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) = 0$.

Ma $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$; la sua derivata rispetto ad r, cioè $\frac{2z}{r^4}$, per $r = a$ diventa $\frac{2z}{a^4}$; possiamo dunque prendere

$$\psi = -\frac{A a^3}{2} \frac{z}{r^3} = \frac{A a^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

e infine

$$\varphi = -A\left[z + \frac{a^3}{2} \frac{z}{r^3}\right]$$

dipendente solamente da z ed r, cioè da z e $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Consideriamo il moto nel piano $z\rho$; le componenti della velocità sono

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A\left[\frac{a^3}{2}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - 1\right];$$

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = A \frac{a^3}{2} \frac{3z\rho}{r^5}.$$

La loro integrazione può farsi in due casi particolari.

Se $\rho = 0$, $r = z$ la seconda è soddisfatta: la prima ci dà

$$\dot{z} = A\left(\frac{a^3}{z^3} - 1\right) \qquad z > a$$

che, con una quadratura, ci esprime z mediante t.

Se poi si riflette che

$$r\dot{r} = z\dot{z} + \rho\dot{\rho} = A\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right) z;$$

si vede che le equazioni suddette sono soddisfatte per $r=a$; e la traiettoria sarebbe un cerchio massimo di sfera. Allora

$$\dot{z} = \frac{3}{2} A \left(\frac{z^2}{a^2} - 1 \right); \quad \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{3}{2} \frac{A}{a^2} dt$$

e quindi

$$z = \text{cost.} + a \, \text{Th} \left(\frac{3}{2} \frac{A}{a} t \right)$$

la molecola impiegherebbe un tempo infinito a percorrere un mezzo cerchio.

12. In un moto vorticoso si ha

$$p = k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}, \quad q = -k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x}, \quad r = 0$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (k \text{ costante}).$$

Esaminare il moto.

Essendo $p = -\frac{ky}{\rho^3}$, $q = \frac{kx}{\rho^3}$, $r = 0$, risulta

$$x\,dx + y\,dy = 0;$$

i vortici sono circoli paralleli al piano xy e col centro sull'asse z. Inoltre $\omega^2 = k^2 (x^2 + y^2) : \rho^6$ diventa infinita nell'origine; la quale dovrà essere esterna al fluido.

Pongasi

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

e quindi risulterà

$$2p = -\Delta_2 U, \quad 2q = -\Delta_2 V, \quad 2r = -\Delta_2 W$$

cioè

$$\Delta_2 U = -2k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}, \quad \Delta_2 V = -2k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial z}, \quad \Delta_2 W = 0.$$

Ma:

$$\Delta_2\left(\frac{y}{\rho}\right) = 2\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}; \text{ ecc.}$$

dunque possiamo assumere

$$U = -k\frac{y}{\rho}, \qquad V = k\frac{x}{\rho}, \qquad W = 0$$

e in conseguenza

$$u = k\frac{xz}{\rho^3}, \qquad v = k\frac{yz}{\rho^3}, \qquad w = k\left(\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Il fluido è in riposo all'infinito ($u = v = w = 0$). Le linee per cui

$$u : v : w = dx : dy : dz$$

(linee di corrente) sono contenute in piani passanti per asse z; la loro ricerca dipende da quadrature. La velocità secondo il raggio ρ è

$$\frac{ux + vy + wz}{\rho} = \frac{2kz}{\rho}.$$

Se quindi una sfera di raggio R si muove lungo z, ogni suo elemento acquista tale velocità.

INDICE ALFABETICO-ANALITICO
DEI VOLUMI I E II *.

A

* Il numero romano rappresenta il volume, e il numero arabo la pagina.

dei),
276.

ema
103.
112.

ti, I,
16.

bgo-
22.
208.
li, I,
210.
199.

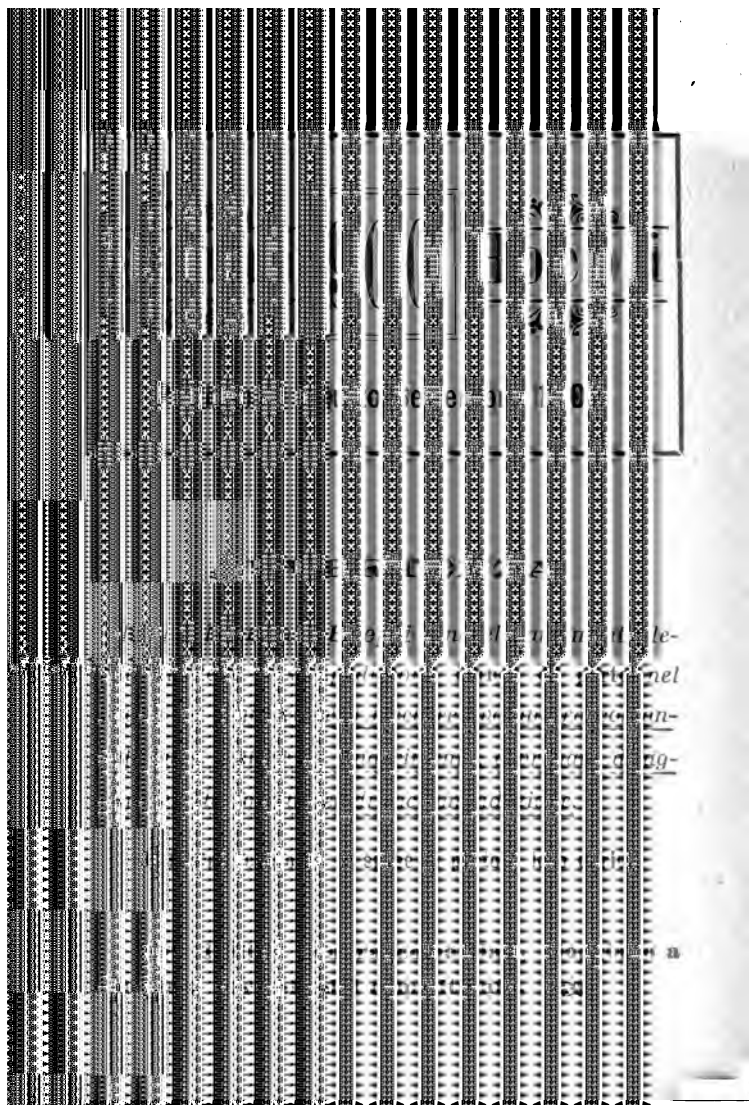
o da
27.
97.

AGGIUNTE E CORREZIONI

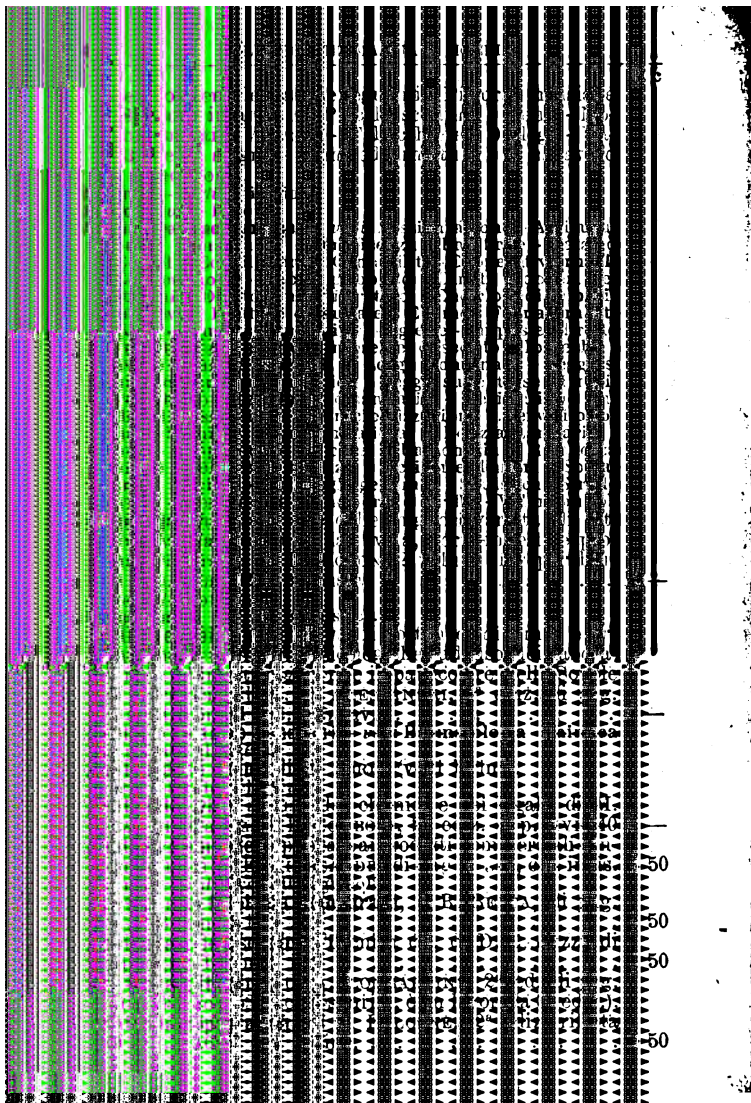
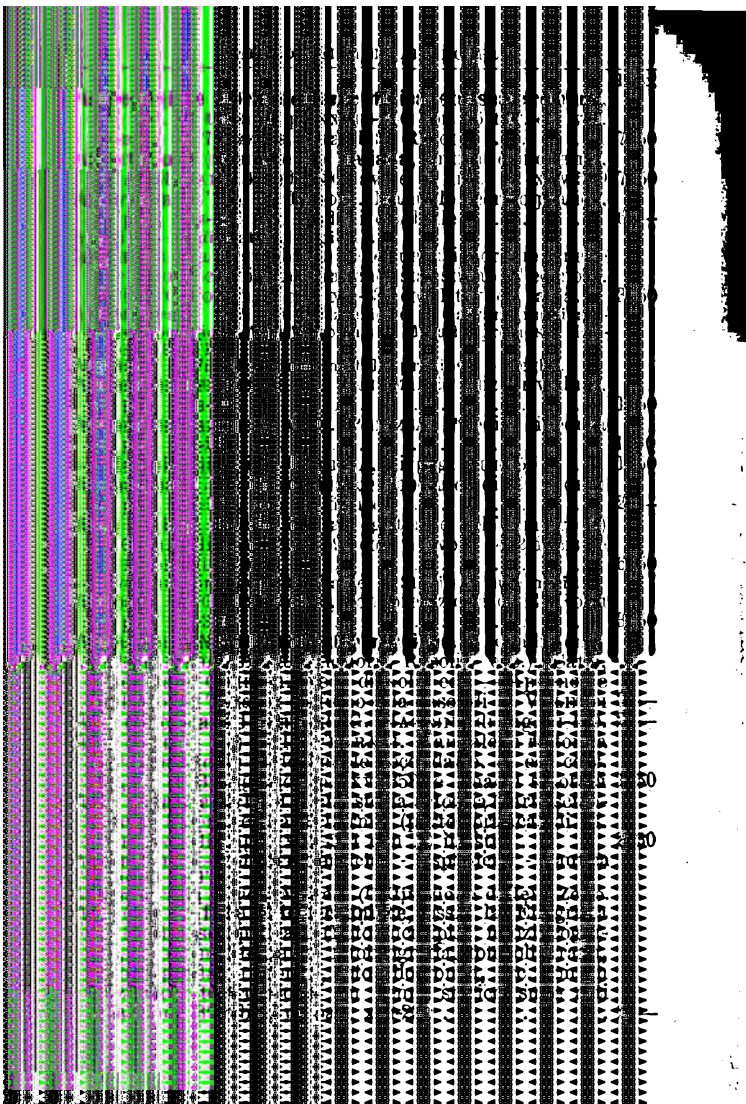
Nota a pag. 67.

L'esperienza di GUGLIELMINI fu fatta nel 1792; la prima del BENZEBERG nel 1802 e quelle di REICH nel 1830-31. Le esperienze di BENZEBERG, che in base al calcolo dovevano dare per la deviazione orientale rispettivamente mm. 8,91; 10,37, diedero invece 9,023; 11,3. Vedi ancora GILBERT, *Les preuves mécaniques de la rotation de la terre.* [Bull. des Sciences mathém. (1882)].

Nota a pag. 199.

Vedi ancora il libro del BALL, *The Theory of Screws.* Dublin, 1876; e una memoria del Prof. CERRUTI, *Intorno alle piccole oscillazioni di un corpo rigido interamente libero.* [Mem. Acc. Lincei, I (3), pp. 345-370 (1876-77)].

L. c.

Agricoltore (Frontuario dell') e dell' ingegnere rurale, di V. NICCOLI, 3ª edizione di pag. XL-500, con 30 inc. 5 50
— **(Il libro dell')** Agronomia, agricoltura, industrie agricole del Dott. A. BRUTTINI, di pag. XX-446 con 303 fig. 3 50
Agrimensura (Elementi di), con speciale riguardo all'insegnamento nelle scuole di Agricoltura ed ai bisogni pratici dell'agricoltore, di S. FERRERI MITOLDI, di pag. XVI-257, con 183 inc. e una tavola colorata . 2 50
Agronomia, del Prof. CAREGA DI MURICCE, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dell'autore, di pag. XII-210 . . 1 50
Agronomia e agricoltura moderna, di G. SOLDANI, 3ª ediz. di pag. VIII-416 con 134 inc. e 2 tavole cromolit. 3 50
Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. ALOI, con 22 inc. e 5 tav. cromolit., pag. XII-238 3 50
Alchimia — *vedi* Occultismo.
Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. CANTAMESSA, di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . 3 —
Alcool industriale, di G. CIAPETTI. Produzione dell'alcole industriale, applicazione dell' alcole denaturato alla fabbricazione dell'aceto e delle vinacce, alla produzione della forza motrice, al riscaldamento, ecc., con 105 illustraz., di pag. XII-262 . . . . 3 —
— *vedi* Birra - Cantiniere - Cognac - Distillazione - Enologia - Liquorista - Mosti - Vino.
Alcoolismo (L') di G. ALLIEVI, di pag. XI-221 . . . 2 —
Algebra complementare, del Prof. S. PINCHERLE:
Parte I. *Analisi Algebrica*, 2ª ediz. di p. VIII-174 . 1 50
Parte II. *Teoria delle equazioni*, pag. IV-169, 4 inc. 1 50
Algebra elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 9ª ediz. riveduta di pag. VIII-210 e 2 incisioni nel testo . . 1 50
— **(Esercizi di)**, del Prof. S. PINCHERLE, di pag. VIII-135. 1 50
Alighieri Dante — *vedi* Dantologia - Divina commedia.
Alimentazione, di G. STRAFFORELLO, di pag. VIII-122 . 2 —
Alimentazione del bestiame, dei Proff. MENOZZI e NICCOLI, di pag. XVI-400 con molte tabelle . . . . . 4 —
Alimenti — *vedi* Adulterazione degli - Aromatici - Conserv. sostanze aliment. - Bromatologia - Gastronomo - Pane.
Allattamento — *vedi* Nutrizione del bambino.
Alligazione (Tavole di) **per l'oro e per l'argento** con numerosi esempi pratici per il loro uso, F. BUTTARI, di pag. XII-220 . . . . 2 50
— *vedi* Leghe — Metalli preziosi.
Alluminio (L'), di C. Formenti di pag. XXVIII-324 . . 3 50
Aloe — *vedi* Prodotti agricoli.
Alpi (Le), di J. BALL, trad. di I. CREMONA, pag. VI-120 . 1 50
Alpinismo, di G. BROCHEREL, di pag. VIII-312 . . . 3 —
— *vedi* Dizionario alpino — Infortuni — Prealpi.
Amalgame — *vedi* Alligazione — Leghe metalliche.
Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità, di L. DE MAURI, di 600 pag. adorno di numerose incis. e mar-

L. c.

Anatomia vegetale, di A. TOGNINI, pag. XVI-274, 41 inc. 3 —
Animali da cortile. Polli, faraone, tacchini, fagiani, anitre, oche, cigni, colombi, tortore, conigli, cavie, furetto, di F. FAELLI, di pag. XVIII-372 con 56 inc. e 19 tav. color. 5 50
Animali domestici — *vedi* Abitazioni degli — Cane — Cavallo — Maiale — Razze bovine, ecc.
Animali (Gli) **parassiti dell'uomo**, di F. MERCANTI, di pag. IV-179 con 33 inc. 1 50
ntichità greche, pubbliche, sacre e private di V. INAMA di pag. XV-224, con 19 tavole e 8 incisioni 2 50
Antichità private dei romani, di N. MORESCHI, 3ª ed. rifatta del Manuale di W. KOPP, pag. XVI-181, 7 inc. 1 50
Antichità pubbliche romane, di J. G. HUBERT, rifacimento delle antichità romane pubbliche, sacre e militari di W. KOPP, trad. di A. WITTGENS, di pag. XIV-324 3 —
Antisettici — *vedi* Medicatura antisettica.
Antologia stenografica, di E. MOLINA (sistema Gabelsberger-Noe), di pag. XI-199 . . . . 2 —
Antropologia, di G. CANESTRINI, 3ª ediz., di pag. VI-239 con 21 inc. 1 50
Antropologia criminale (I principi fondamentali della) Guida per i giudizi medico-forensi nelle quistioni di imputabilità di G. ANTONINI, di pag. VIII-167 . . . 2 —
— *vedi* Psichiatria.
Antropometria, di R. LIVI, di pag. VIII-237 con 32 inc. 2 50
Apicoltura, di G. CANESTRINI, 5ª ed. riveduta di pag. IV-215 con 21 inc. . . . . 2 —
Arabo parlato (L') in Egitto, grammatica, frasi, dialoghi e raccolta di oltre 6000 vocaboli di A. NALLINO, pag. XXVIII-386 . . . . 4 —
Araldica (Grammatica), ad uso degli italiani, compilata da F. TRIBOLATI, 4ª edizione con introduzione ed agg. di G. CROLLALANZA, pag. XI-187, con 274 inc. 2 50
— *vedi* Vocabolario araldico.
Araldica Zootecnica di E. CANEVAZZI. I libri geologici degli animali domestici, Stud - Herd - Flock - Books. 1904, di pag. XIX-322, con 43 inc. 3 50
Aranci — *vedi* Agrumi.
Archeologia - *vedi* Amatore oggetti d'arte - Antichità greche - Antichità private dei romani - Id. pubbliche romane - Armi antiche - Araldica - Architettura - Atene - Atlante numismatico - Majoliche - Mitologia - Monete greche - Id. papali - Id. romane - Numismatica - Ornatista - Paleografia - Paleoetnologia - Pittura italiana - Ristauratore dipinti - Scoltura - Storia dell'arte - Topografia di Roma - Vocabolarietto numismatico - Vocabol. araldico.
Archeologia e storia dell'arte greca, di I. GENTILE, 3ª ediz. rifatta da S. RICCI di pag. XLVIII-270 con 215 tav. aggiunte e inserite nel testo 11 50
— Il solo testo a parte 9 50

L.

Asfalto (L') fabbricazoine, applicazione, di E. RIGHETTI con 22 incisioni, di pag. VIII-152. . . . . 2 —
Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di pag. XII-308 3 —
Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di pag. VI-161 1 50
Assicurazioni (Le) **e la stima dei danni** nelle aziende rurali, con appendice sui mezzi contro la grandine, di A. Capilupi, di pag. VIII-284, 17 inc. 2 50
Assistenza degl'infermi nell'ospedale ed in famiglia, di C. CALLIANO, 2ª ediz., pag. XXIV-448, 7 tav. . . . 4 50
Assistenza dei pazzi nel manicomio e nella famiglia, di A. PIERACCINI e prefazione di E. MORSELLI, p. 250 2 50
Astrologia — *vedi* Occultismo
Astronomia, di J. N. LOCKYER, nuova versione libera con note ed aggiunte di G. CELORIA, 5ª ediz. di pag. XVI-255 con 54 inc. 1 50
— *vedi* Gravitazione.
Astronomia (L') nell'antico testamento, di G. V. SCHIAPARELLI, di pag. 204 . . . . 1 5
Astronomia nautica, di G. NACCARI, di pag. XVI-320, con 45 incis. e tav. numeriche . . . . 3 —
Atene. Brevi cenni sulla città antica e moderna, seguiti da un saggio di Bibliografia descrittiva e da un'Appendice Numismatica, di S. AMBROSOLI, con 22 tavole e varie incis. 3 50
Atlante geografico-storico d'Italia. di G. GAROLLO. 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appendice . . . 2 —
Atlante geografico universale, di R. KIEPERT, 26 carte con testo. *Gli stati della terra* di G. GAROLLO. 10ª ed. (dalla 91.000ª alla 100.000ª copia) pag. VIII-88 . . 2 —
Atlante numismatico — *vedi* Numismatica.
Atletica — *vedi* Acrobatica.
Atmosfera — *vedi* Igroscopi e igrometri.
Attrezzatura, manovra navale, segnalazioni marittime e Dizionarietto di Marina, di F. IMPERATO, 3ª ediz. di pag. XXIV-643. con 330 incis. e 28 tav. in cromolit. riproducenti le bandiere marittime di tutte le nazioni 6 50
Autografi (L'amatore d'), di E. BUDAN, con 361 facsimili di pag. XIV-426 . . . . 4 50
Autografi (Raccolte e raccoglit. di) in Italia, di C. VANBIANCHI, di pag. XVI-376, 102 tav. di facsimili d'autore e ritratti 6 50
Automobilista (Manuale dell') **e guida pei meccanici conduttori d'automobili**. Trattato sulla costr. dei veicoli semoventi, di G. PEDRETTI, 2ª ediz. di pag. XX-746 8 50
Automobili — *vedi* Ciclista - Locomobili - Motociclista — Trazione a vapore.
Avarie e sinistri marittimi (Manuale del regolatore e liquidatore di) di, V. ROSSETTO. Appendice: Breve dizionario di terminologia tecnico-navale e commer-

L. c.

ciale marittimo inglese-Italiano. Ragguaglio dei pesi e misure inglesi con le italiane, pag. xv-496, 25 fig. 5 50

Avicoltura — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicolt.

Avvelenamenti - *vedi* Analisi chim. - Chimica legale - Veleni.

Bachi da seta, di F. NENCI. 3ª ediz. con note ed aggiunte, di pag. XII-300, con 47 incis. e 2 tav. . . . 2 50

Balbuzie (Cura della) **e dei difetti di pronunzia**, di A. SALA, di pag. VIII-214 e tavole. . . . . 2 —

Balistica — *vedi* Armi antiche - Esplodenti - Pirotecnia - Storia dell'arte miltare.

Ballo (Manuale del), di F. GAVINA, 2ª Ediz. di pag. VIII-265, con 103 fig.: Storia della danza - Balli girati - Cotillon - Danze locali - Feste di ballo - Igiene del ballo 2 50

Bambini — *vedi* Balbuzie - Malattie d'infanzia - Nutrizione dei bambini - Ortofrenia - Rachitide.

Barbabietola (La) da zucchero. Cenni storici, caratteri botanici, clima, lavoraz. del terreno, concimaz. rotazione, semina, cure durante la vegetaz., raccolta e conservaz., produz. del seme, malattie, fabbricaz. di zucchero, di A. SIGNA, p. XII-225, 29 inc. e 2 tav. color. 2 50

— *vedi* Zucchero.

Batteriologia, di G. CANESTRINI, 2ª ed. pag. x-274 37 inc. 1 50

Beneficenza (Manuale della), di L. CASTIGLIONI, con appendice sulle contabilità delle istituzioni di pubblica beneficenza, di G. ROTA, di pag. XVI-340 . . 3 50

Belle arti *vedi* — Amatore oggetti d'arte - Anatomia pittorica - Armi antiche - Archeologia dell'arte greca - Id. dell'arte romana - Architettura - Arti grafiche - Calligrafia - Colori e pittura - Decoraz. ed industrie artistiche - Disegno - Gramm. del disegno - Fiori artificiali - Fotosmaltografia - Gioielleria - Litografia - Luce e colori - Majoliche e porcellane - Marmista - Monogrammi Ornatista - Pittura italiana - Pittura ad olio - Prospettiva - Ristauratore dipinti - Scolt. - Stor dell'arte - Teoria delle ombre.

Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, di F. ALBERTI 2ª ediz. rifatta di U. BARPI di pag. XII-322, con 47 tavole e 118 figure 4.50

— *vedi* Abitazioni di animali - Alimentazione d. bestiame - Araldica zootecnica - Cavallo - Coniglicoltura - Igiene veterinaria - Majale - Malattie infettive - Polizia sanitaria - Pollicoltura - Razze bovine - Veterinario - Zoonosi - Zootecnia.

Biancheria (Disegno, taglio e confezione di), Manuale teorico pratico ad uso delle scuole normali e professionali femminili e delle famiglie, di E. BONETTI, 3ª ediz. coll'aggiunta di nuove tavole e prospetti per l'ingrandimento e l'impicciolimento dei modelli, di pag. XX-234, 60 tavole e 6 prospetti . . . . . . 4 —

Bibbia (Man. della), di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-308. 2 50

Bibliografia, di G. OTTINO, 2ª ed., pag. IV-166, 17 incis. 2 —

— *vedi* Atene - Dizionario bibliografico.

Bibliotecario (Manuale del), di G. PETZHOLDT, tradotto

L. c.

sulla 3ª ediz. tedesca, per cura di G. BIAGI e G. FUMAGALLI, di pag. XX-354-CCXIII 7 50
— *vedi anche* Dizionario bibliografico - Paleografia.

Biliardo (Il giuoco del), di J. GELLI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-175, con 80 illustrazioni 2 50

Biografia — *vedi* Cristoforo Colombo - Dantologia - Diz. biografico - Manzoni - Napoleone I - Omero - Shakespeare.

Biologia animale. Zoologia generale e speciale per Naturalisti, Medici e Veterinari, di G. COLLAMARINI, di di pag. x-426 con 23 tavole . . . . 3 —

Birra (La). Malto, luppolo, fabbricazione, analisi, di S. RASIO e di F. SAMARANI di pag. 279 con 25 incis. . 3 50

Bollo — *vedi* Codice del Bollo - Leggi registro e bollo.

Bolloneria — *Vedi* Stampaggio a caldo.

Bonificazioni (Manuale amministrativo delle), di G. MEZZANOTTE, di pag. XII-294 . . . . 3 —

Borsa (Operaz. di) — *vedi* Debito pubbl. - Valori pubblici.

Boschi — *vedi* Consorzi — Selvicoltura.

Botanica, di I. D. HOOKER, traduzione di N. PEDICINO 4ª ediz., di pag. VIII-134, con 68 incis. 1 50
— *vedi* Dizionario di botanica.
— *vedi anche* Ampelografia - Anatomia vegetale - Fisiologia vegetale - Floricoltura - Funghi - Garofano - Malattie crittogamiche - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Pomologia - Rose - Selvicoltura - Tabacco - Tartufi.

Botti — *vedi* Enologia.

Bromatologia. Dei cibi dell'uomo secondo le leggi dell'igiene, di S. BELLOTTI, di pag. XV-251, con 12 tav. 3 50

Bronzatura — *vedi* Metallocromia - Galvanostegia.

Bronzo — *vedi* Fonditore - Leghe metalliche - Operaio.

Buddismo, di E. PAVOLINI, di pag. XVI-164 . . . 1 50

Buoi — *vedi* Bestiame — Razze bovine

Burro — *vedi* Latte - Caseificio.

Caccia — *vedi* Cacciatore - Falconiere.

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 3ª ediz. rifatta, di pag. IX-344 con 48 incis. 2 50

Cacio — *vedi* Bestiame - Caseificio - Latte, ecc.

Caffè — *vedi* Prodotti agricoli.

Caffettiere e sorbettiere (Manuale del). Caffè, Thè, Liquori, Limonate, Sorbetti, Granite, Marmellate, Conservazione dei frutti, Ricette per feste da ballo, Vini Cioccolata di L. MANETTI, di pag. XII-311, con 65 inc. 2 50

Calcestruzzo (Costruzioni in) **ed in cemento armato,** di G. VACCHELLI, 3ª ediz. , pag. XVI-383, con 270 fig. 4 —
— *vedi anche* Capomastro - Mattoni e pietre.

Calci e Cementi (Impiego delle), di L. MAZZOCCHI, 2ª edizione riveduta e corretta, pag. XII-225, con 56 fig. 2 50

Calcolazioni mercantili e bancarie — *vedi* Conti e calcoli fatti - Interesse e sconto - Prontuario del ragioniere - Monete inglesi.

Calcoli fatti — *vedi* Conti e

L. c.

alcolo infinitesimale di E. PASCAL:
I. *Calcolo differenziale.* 2ª ediz. rived., di pag. XII-311, 10 incis. . . . . 3 —
II. *Calcolo integrale,* 2ª ediz. di pag. VIII-329 . 3 —
III. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite,* di pag. XII-300 . . . . 3 —
— **(Esercizi di)** (calcolo differenziale e integrale), di E. PASCAL, di pag. XX-372 . . . . 3 —
— *vedi* Determinanti - Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche - Gruppi di trasformaz. - Matematiche superiori.
Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, e di altri apparecchi industriali, di G. BELLUOMINI, di pag. XII-248, con 220 incis.. . . . . 3 —
— *vedi anche* Locomobili — Macchinista.
Calligrafia (Manuale di), di R. PERCOSSI. (in lavoro).
Calore (Il) di E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296, con 98 incis. . . . . 3 —
Camera di Consiglio Civile, di A. FORMENTANO. I. Norme generali sul procedimento in Camera di Consiglio. II. Giurisdizione volontaria. III. Affari di giurisdizione contenziosa da trattarsi senza contradditore. IV. Materie da trattarsi in Cam. di Consiglio, pag. XXXII-574 4 50
Campicello (Il) scolastico. Impianto e coltivazione. Manuale di agricoltura pratica per i Maestri di E. AZIMONTI e C. CAMPI, di pag. XI-175, con 126 incis. . 1 50
Cancelliere — *vedi* Conciliatore
Candeggio — *vedi* Industria tintoria.
Candele — *vedi* Industria stearica.
Cane (Il) Razze mondiali, allevamento, ammaestramento, malattie con una appendice: I cani della spedizione polare di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, di A. VECCHIO 2ª ediz. di pag. XVI-442, con 152 inc. e 63 tav. . 7 50
Cani e gatti, di F. FAELLI (In lavoro).
Canottaggio (Manuale di), del Cap. G. CROPPI, di pag. XXIV-456 con 387 incis, e 91 tav. cromolit. 7 50
Cantante (Man. del), di L. MASTRIGLI, di pag. XII-132 2 —
Cantiniere (Il). Manuale di vinificazione per uso dei cantinieri, di A. STRUCCHI, 3ª ediz. con 52 incis. e una tabella per la riduz. del peso degli spiriti, p. XVI-256 2 —
Canto (Il) **nel suo meccanismo,** di P. GUETTA, di pag. VIII-253, con 24 incis. 2 50
— *vedi anche* Arte del canto - Cantante.
Capitalista (Il) nelle Borse e nel Commercio dei valori pubblici. Guida finanziaria per le Borse, Banche, Industrie, Società per azioni e Valori pubblici di F. PICCINELLI, di pag. LI-1172 . . . . 12 00
Capomastro (Man. del). Impiego e prove dei materiali idraulici-cementizii, con riassunto della legge per gli infortuni degli operai sul lavoro e delle disposizioni

L.c.

di legge sui fabbricati, di G. Rizzi, pag. xii-263, con 19 incis. intercalate nel testo 2 50

Cappellaio (Man. d.), di L. Ramenzoni, p. xii-222, 68 inc. 2 50

Capre – *vedi* Razze bovine, ecc.

Carboni fossili inglesi. Coke. Agglomerati di G. Gherardi, pag. xii-586 con fig. nel testo e cinque carte geografiche dei bacini carboniferi inglesi . . . . . 6 —

Carburo di calcio — *vedi* Acetilene.

Carta (Ind. della), L. Sartori, p. vii-326, 106 inc. e 1 tav. 5 50

Carte fotografiche, Preparazioni e trattamento di L. Sassi, pag. xii-353. . . . . 3 50

Carte geografiche – *vedi* Atlante

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto della storia della Cartografia, di E. Gelcich, di pag. vi-257, con 36 illustrazioni . . . . 2 —

Casa (La) **dell'avvenire**, di A. Pedrini. Vade-mecum dei costruttori, dei proprietari di case e degli inquilini. Raccolta ordinata di principî d'ingegneria sanitaria, domestica ed urbana, per la costruzione di case igieniche, civili, operaie e rustiche e per la loro manutenzione, di pag. xv;468, con 213 incis. . . . 4 50

Case coloniche — *vedi* Fabbricati rurali.

Case operaie — *vedi* Abitazioni popolari.

Caseificio, di L. Manetti, 4ª ediz. nuovamente ampliata da G. Sartori, di pag. xii-280, con 49 inc. . 2 —

— *vedi* Bestiame — Latte, cacio e burro.

Catasto (Il nuovo) **italiano**, di E. Bruni, pag. vii-346. 3 —

Cavallo (Il), di C. Volpini, 3ª ediz. rived. ed ampliata di pag. vi-233 con 48 tavole 5 50

Cavalli — *vedi* Razze bovine. equine, ecc.

Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione di E. Jona, di pag. xvi-388, 188 fig. e 1 carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine . 5 50

Cedri — *vedi* Agrumi.

Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali, di F. Borletti, di pag. vi-148 con 29 incisioni . . 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di). di G. Orlandi, di pag. 1200, con quadro generale d'interpolazioni . 18 —

Celluloide — *vedi* Imitazioni

Cementazione — *vedi* Tempera.

Cemento armato — *vedi* Calcestruzzo - Calci e cementi - Mattoni

Ceralacca — *vedi* Vernici e lacche.

Ceramiche — *vedi* Maioliche e porcellane - Fotosmaltogr.

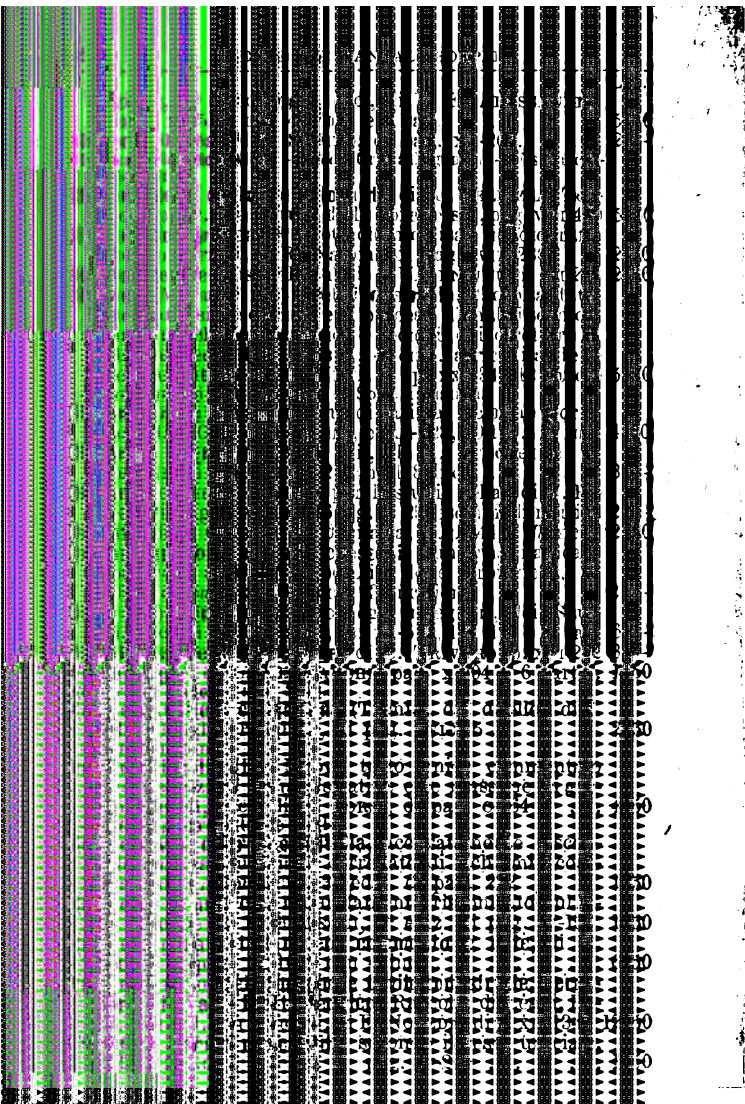
Chimica, di H. E. Roscoe, 6ª ediz. rifatta da E. Ricci, di pag. xii-231, con 47 incis. 1 50

Chimica agraria, di A. Aducco, 2ª ediz. di pag. xii-515 3 50

— *vedi* Concimi - Fosfati - Humus - Terreno agrario.

Chimica analitica (Elementi scientifici di), di W. Ostwald, trad. del Dott. Bolis, di pag. xvi-234 . . . 2 50

Chimica applicata all'igiene. Ad uso degli Ufficiali sanitari, Medici, Farmacisti, Commercianti, Laboratori

L. c.

Codice metrico internazionale — *vedi* Metrologia.

Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, di L. FRANCHI, 3ª ediz., di pag. IV-230 . 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo secondo il testo ufficiale di L. FRANCHI 2ª ediz. di p. 179 1 50

Codice del perito misuratore. Raccolta di norme e dati pratici per la misurazione e la valutazione d'ogni lavoro edile, preventivi, liquidazioni, collaudi, perizie, arbitramenti, di L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, 2ª ediz. di pag. VIII-530. con 169 illustr.. . . . . . 5 50

Codice di procedura civile, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale da L. FRANCHI, 2ª ediz. di p. 167 1 50

Codice sanitario — *vedi* Legislazione sanitaria.

Codice del teatro (Il). Vade-mecum legale per artisti lirici e drammatici, impresari, capicomici, direttori d'orchestra, direzioni teatrali, agenti teatrali, gli avvocati e per il pubblico. di N. TABANELLI, pag. XVI-328 3 —

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale e coordinati e annotati da L. FRANCHI, raccolti in cinque grossi volumi legati in pelle.

Vol. I. Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo (*otto codici*) 2ª edizione, di pag. VIII-1261 . . . . 8 50

Vol. II. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolam. e disposte secondo l'ordine alfabetico delle materie. 2ª ediz. riveduta ed aumentata, *divisa in 3 parti.*

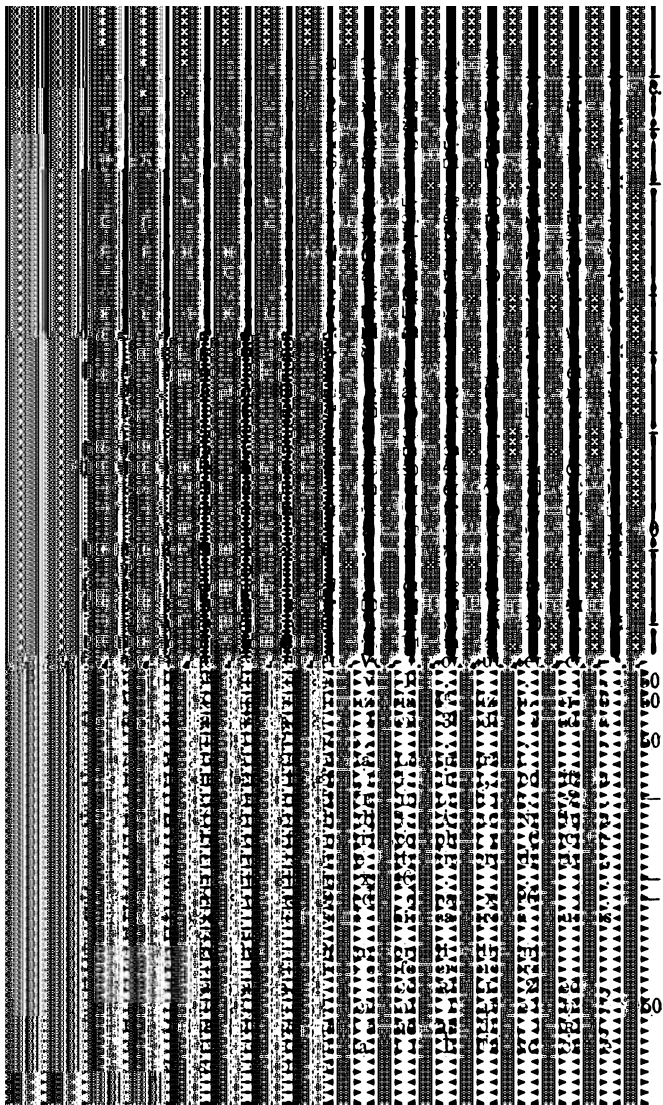
Parte I. Dalla voce « Abbordi di mare » alla voce « Dominii collettivi », di pag. VIII-1456 a due colonne 12 50

Parte II. Dalla voce « Ecclesiastici » alla voce « Polveri piriche » pag. 1459 a 1855 due colonne . 12 50

Parte III. Dalla voce « Posta » alla voce « Zucchero » pag. 2857 a 4030, a due colonne. 12 50

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati 2ª ediz. di pag. VII-617 . . . 6 50

Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana. Legislazioni straniere. Convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati, di pag. VIII-1007 . . . . 8 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di DAL PIAZ,

L. c.

Conservazione dei prodotti agrari, di C. MANICARDI, di pag. XV-220, con 12 incis. 2 50

Consigli pratici — *vedi* Caffettiere - Ricettario domestico - Industriale - Soccorsi d'urgenza.

Consorzi di difesa del suolo (Manuale dei). Sistemazioni idrauliche. Culture silvane e rimboschimento, di A. RABBENO, di pag. VIII-296 . . . . 3 —

Contabilità comunale, secondo le nuove diposiz. legislative e regolamentari di A. DE BRUN. (2ª ediz. rifatta, ed ampliata di pag. XVI-650 . . . . 5 50

— *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Contabilità domestica. Nozioni amministrativo-contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, di O. BERGAMASCHI, di pag. XVI-186 . . . . 1 50

Contabilità generale dello Stato, di E. BRUNI, 2ª ediz. rifatta, pag. XVI-420 . . . . 3 —

Contabilità d. istituz. pubbl. beneficenza — *vedi* Beneficenza.

Conti e Calcoli fatti, di I. GHERSI, 93 tabelle e istruzioni pratiche sul modo di usarle, di pag. 204. . . . 2 50

Contrappunto, di G. G. BERNARDI, di pag. XVI-238 . . 3 50

Contratti agrari — *vedi* Mezzeria.

Conversazione italiana e tedesca (Manuale di), ossia guida completa per chiunque voglia esprimersi con proprietà e speditezza in ambe le lingue, e per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. FIORI, 8ª ediz. rifatta da G. CATTANEO, pag. XIV-400 . . . . 3 50

Conversazione italiana-francese — vedi *Dottrina popolare - Fraseologia.*

Cooperative rurali, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, di acquisto di materie prime, di vendita di prodotti agrari. Scopo, costituzione, norme giuridiche, tecniche, amministr. comput. di V. NICCOLI, pag. VIII-362 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di F. VIRGILII, pag. XII-228 . . . . 1 50

Correnti elettriche alternate semplici, bifasi e trifasi. Manuale pratico per lo studio, costruzione ed esercizio degli impianti elettrici, di A. MARRO, di pagine XIV-615-LXIV, con 218 incis. e 46 tabelle 6 50

Corrispondenza commerciale poliglotta, di G. FRISONI compilata su di un piano speciale nelle lingue italiana francese, tedesca inglese e spagnuola.

I. — **PARTE ITALIANA**: *Manuale di Corrispondenza Commerciale italiana* corredato di facsimili dei vari documenti di pratica giornaliera, seguito da un GLOSSARIO delle principali voci ed espressioni attinenti al Commercio, agli Affari marittimi, alle Operazioni bancarie ed alla Borsa, ad uso delle Scuole, dei Banchieri, Negozianti ed Industriali di qualunque nazione, che desiderano abilitarsi alla moderna terminologia e nella corretta fraseologia mercantile italiana, 2ª ed. di pag. XX-478 4 —

L. c.

II. — **PARTE SPAGNUOLA**: *Manual de Correspondencia Commercial Espanola*, pag. xx-440 . . . . . . 4 —
III — **PARTE FRANCESE**: *Manuel de Correspondance commerciale française*, di pag. xvi-446 . . . . 4 —
IV — **PARTE INGLESE**: *A Manual of english Commercial correspondence*, pag. xvi-448 . . . , . . . , . 4 —
V — **PARTE TEDESCA**: *Handbuch der deutschen Handelskorrespondenz*, pag. xvi-460 . . . . 4 —
N.B. Sono 5 Manuali di corrispondenza, ognuno dei quali è la traduzione di uno qualunque degli altri quattro, per cui si fanno reciprocamente l'ufficio di chiave.

Corse (Le) con un dizionario delle voci più in uso, di G. FRANCESCHI, di pag. xii-305 . . . . 2 50
— *vedi anche* Cavallo - Proverbi - Razze bovine equine, ecc.

Cosmografia. *Uno sguardo all'universo*, di B. M. LA LETA, pag. xii-197. con 11 incis. e 3 tav. 1 50
– *vedi* Sfere cosmografiche.

Costituzione degli Stati — *vedi* Diritti e doveri - Diritto internazionale - Diritto costituzionale - Ordin. di stati.

Costruttore navale (Manuale del), di G. ROSSI, pagine xvi-517, con 231 fig. interc. nel testo e 65 tab. . . 5 —

Costruzioni — *vedi* Abitazioni - Architettura - Calcestruzzo - Calci - Capomastro - Case dell'avvenire - Città (La) moderna - Fabbricati civili - Fabbricati rurali - Fognatura - Ingegnere civile - Lavori marittimi - Mattoni e pietre - Peso me talli - Resistenza dei materiali - Resistenza e pesi di travi metalliche - Scaldamento.

Cotoni — *vedi* Filatura - Prodotti agricoli - Tintura - Tessitur.

Cremore di tartaro — *vedi* Distillazione.

Cristallo — *vedi* Fotosmaltografia - Specchi - Vetro.

Cristallografia geometrica, fisica e chimica, applicata ai minerali, di F. SANSONI, p. xvi-367, 284 inc. . . . 3 —
— *vedi* Fisica cristallografica.

Cristo — *vedi* Imitazione di Cristo.

Cristoforo Colombo di V. BELLIO, p. iv-136 e 10 inc.. 1 50

Crittogame — *vedi* Funghi — Malattie crittogam. - Tartufi.

Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare e decifrare le corrispondenze segrete. Saggio del conte L. GIOPPI, pag. 177 . . . 3 50

Cronologia e calendario perpetuo. Tavole cronografiche e quadri sinottici per verificare le date storiche dal principio dell' Era cristiana ai giorni nostri, di A. CAPPELLI, di pag. xxxiii-421 . . . . 6 50

Cronologia delle Scoperte e delle esplorazioni geografiche dal 1492 a tutto il sec. XX, di L. HUGUES, p. viii-487 4 50

Cronologia – *vedi* Storia e cronologia.

Cubatura dei legnami (Prontuario per la), di G. BELLUOMINI, 6ª ediz. corretta ed accresciuta, pag. 220 . 2 50

Cuoio — *vedi* Concia delle pelli - Imitazioni.

Curatore dei fallimenti (Manuale teorico-pratico del) e del Commissario giudiziale nel concordato preventivo e procedura di piccoli fallimenti, di L. MOLINA, di pag. xl-910 8 50

urve circolari e raccordi. Manuale pratico per il trac-

L. c.

ciamento delle curve in qualunque sistema e in qualsiasi caso particolare, nelle ferrovie, strade e canali, di C. FERRARIO, pag. XI-264, con 94 incis. . . 3 50

Curve graduate e raccordi a curve graduate, con speciale riferimento alle pratiche importanti e nuove applicazioni nei tracciamenti ferroviari, di C. FERRARIO, in continuazione al Manuale « Curve circolari e raccordi a curve circolari », dello stesso autore, di pag. XX-251, con 25 tavole e 41 figure 3 50

Danese (Lingua) — *vedi* Grammatica — Letteratura.

Dante Alighieri — *vedi* Divina Commedia.

Dantologia, di G. A. SCARTAZZINI. Vita e opere di Dante Alighieri, 3ª ed. con ritocchi e agg. di N. SCARANO 3 —

Datteri — *vedi* Prodotti agricoli.

Debito (Il) **pubblico italiano**. Regole e modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. AZZONI, pag. VIII-376 . . . . 3 —

— *vedi* Notaio - Valori pubblici.

Decorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.

Decorazioni del vetro — *vedi* Specchi - Fotosmaltologia - Vetro.

Decorazioni e industrie artistiche, di A. MELANI, due vol., pag. XX-460, 118 inc. (esaurito, la 2ª ed. è in lav).

Denti — *vedi* Igiene della bocca.

Destrina — *vedi* Fecola.

Determinanti e applicazioni, di E. PASCAL, pag. VII-330 3 —

Diagnostica — *vedi* Semeiotica.

Dialetti italici. Grammatica, iscrizione, versione, e lessico, di O. NAZARI, pag. XVI-364. . . . . 3 —

— *vedi* Gramm storica della lingua e dei dialetti italiani.

Dialetti letterari greci (epico, neo-ionico, dorico, eolico) di G. BONINO, pag. XXXII-214 . . . . 1 50

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari, di G. SOLI, pag. VIII-314 . . . 1 50

Digesto (Il), di G. FERRINI, pag. IV-134 . . . . . . 1 50

Dinamica elementare, di G. CATTANEO, p. VIII-146, 26 fig. 1 50

Dinamite — *vedi* Esplodenti.

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, di D. MAFFIOLI, 11ª ediz. (dal 31 al 35° migliaio) con una appendice sul Codice penale, pag. XVI-229 . . . . . 1 50

Diritti d'Autore — *vedi* Codici e Leggi usuali d'Italia Vol III.

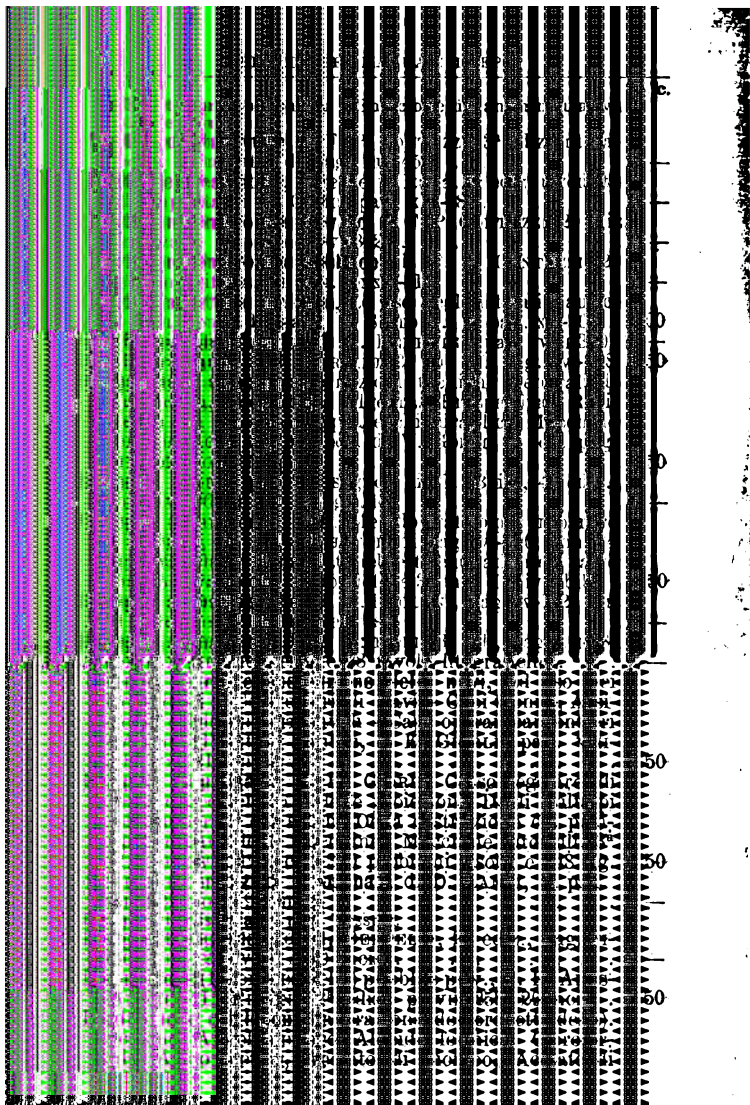
Diritto — *vedi* Filosofia del Diritto.

Diritto amministrativo e cenni di Diritto costituzionale, giusta i programmi governativi ad uso di Istituti tecnici, di G. LORIS, 6ª edizione di pag. XIV-424 . . . 3 —

Diritto civile (Compendio di), di G. LORIS, giusta i programmi ad uso degli Istit. tecnici, 3ª ed. p. XVI-397 3 —

Diritto civile italiano, di C. ALBICINI. p. VIII-128 . . 1 50

Diritto commerciale italiano, di E. VIDARI, 3ª ediz. diligentemente riveduta, pag. X-448 . . . . 3 —

Diritto comunale e provinciale — *vedi* Contabilità comunale

L. c.

sodio. *Industrie elettrochimiche.* Ossidi di piombo, Minio, Biacca, Soda Caustica, Clorati, Cromati, di F. VILLANI, di pag. XIV-312 . . . . 3 50

Distillazione delle Vinacce, e delle frutta fermentate. Fabbricazione razionale del Cognac, Estrazione del Cremore di Tartaro ed utilizzazione di tutti i residui della distillazione, di M. DA PONTE, 2ª ediz. rifatta, tenenti le leggi italiane sugli spiriti e la legge Austro-Ungarica, pag. XII-375, con 68 inc.. . . . . . . 3 50

Ditteri italiani, di P. LIOY (*Entomologia III*), pag. VII-356, con 227 inc. . . . . 3 —

Divina Commedia di Dante Alighieri (Tavole schematiche della), di L. POLACCO, seguite da 6 tav. topogr. in cromolit. disegn. da G. AGNELLI, pag. X-152 . . 3 —

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª *Vette e valichi italiani,* di E. BIGNAMI-SORMANI. — Parte 2ª *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia,* di C. SCOLARI, pag. XXII-310 . . . . 3 50

Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo, riprodotte con oltre 13000 segni incisi, aggiuntovi un prontuario di *Sigle Epigrafiche,* i monogrammi, la numerizzazione romana ed arabica e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., di A. CAPPELLI, p. LXII-433 7 50

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, pag. 100 . . . 1 50

Dizionario biograf. universale, di G. GAROLLO (In lav.).

Dizionario di botanica generale G. BILANCIONI. Istologia, Anatomia, Morfologia, Fisiologia, Biologia vegetale, Appendice, Biografie di illustri botanici, di p. XX-926 10 —

Dizionario dei comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento del 10 febbraio 1901, compilato da B. SANTI, 2ª ediz., con le altezze sul livello del mare, di pag. VIII-222 . , ... 3 —

Dizionario Eritreo (Piccolo) **Italiano-Arabo-Amarico,** raccolta di vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella Col. Eritrea, di A. ALLORI, p. XXXIII-203 2 50

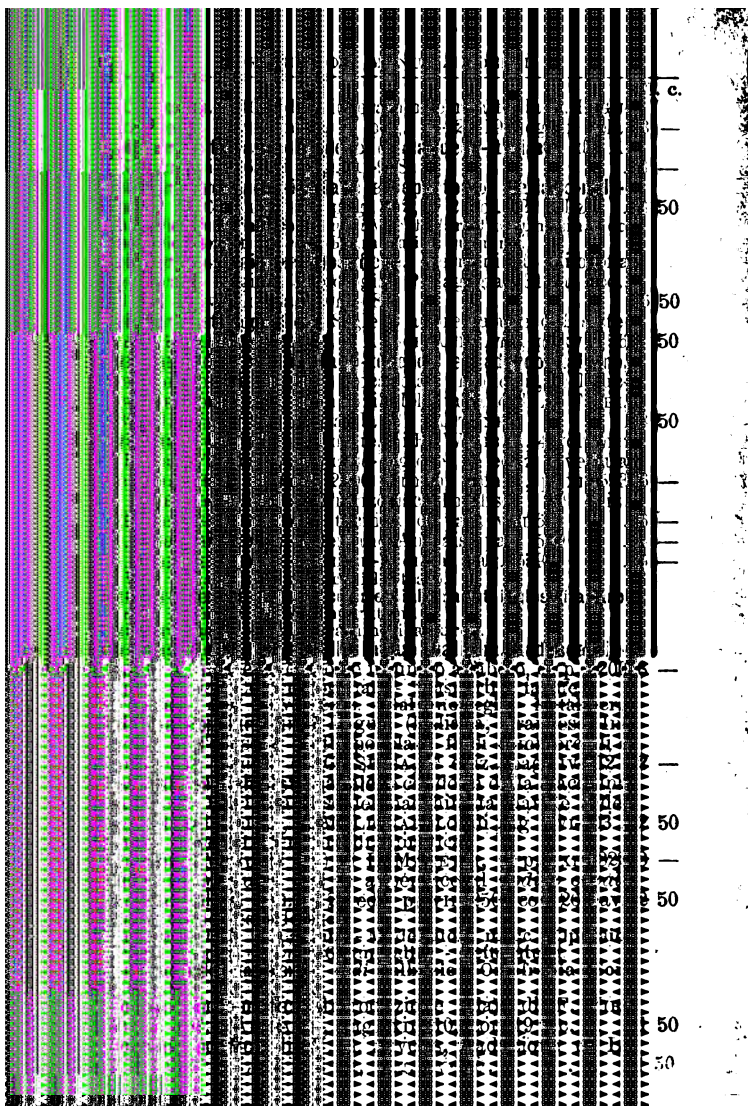
Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografica, di J. GELLI 2ª ed., con appendice 1898-99, pag. LXIII-464 . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi e 600 formule di L. GIOPPI, p. VIII-600, 95 inc. e 10 tav. . . 7 50

Dizionario geografico universale, di G. GAROLLO, 4ª ediz, del tutto rifatta e molto ampliata, di pag. XII-1451 a due colonne . . , ... 10 —

Dizionario gotico — *vedi* Lingua gotica.

Dizionario greco-moderno, di E. BRIGHENTI (In lavoro).

Dizionario tascabile italiano-inglese e inglese-italiano, di

Edilizia — *vedi* Costruzioni L. c.
Elasticità dei corpi — *vedi* Equilibrio.
Elettricità, di FLEEMING JENKIN, traduz. di R. FERRINI, 4ª ediz.. rived., pag. XII-237, con 40 inc. 1 50
— *vedi* Cavi telegrafici - Correnti elettriche - Elettrotecnica - Elettrochimica - Fulmini - Galvanizzazione - Illuminazione elettr. - Ingegnere elettricista - Magnetismo ed elettricità - Metallocromia - Operaio elettrotec. - Röntgen - Telefono - Telegrafia - Unità assolute.
Elettricità e materia di J. J. THOMSON. Traduzione ed aggiunte di G. FAÈ. 1905, di pag. XIV-299 con 18 inc. 2 —
Elettricitá medica, Elettroterapia. Raggi Röntgen. Radioterapia. Fototerapia. Ozono, Elettrodiagnostica, di A. D. BOCCIARDO, di pag. x-201, con 54 inc. e 9 tav. 2 50
— *vedi* Luce e salute - Röntgen (Raggi).
Elettrochimica (Prime noz. el. di), A. COSSA, VIII-104, 10 inc. 1 50
— *vedi* Distillazione del legno.
Elettromotori campioni e metodi di misura delle forze elettromotrici, di G. P. MAGRINI, p. XVI-185, 76 fig. 2 —
Elettrotecnica (Manuale di), di GRAWINKEL-STRECKER. traduz. italiana di F. DESSY, 2ª ed., p. XIV-890, 360 fig. 9 50
— *vedi* Operaio elettrotecnico.
Elezioni politiche — *vedi* Legge elettorale politica.
Ematologia — *vedi* Malattie del sangue.
Embriologia e morfologia generale, di G. CATTANEO, pag. X-242, con 71 inc. 1 50
Enciclopedia del giurista — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia.
Enciclopedia (Piccola) **amministrativa**. Manuale teorico-pratico per le amministrazioni comunali, provinciali e delle opere pie, di E. MARIANI, di pag. XV-1327 . 12 50
Enciclopedia Hoepli (Piccola),. in 2 grossi vol. di 3375 pag. di 2 colonne per ogni pagina con Appendice (146740 voci) — L. 20. (Esaurito).
Energia fisica, di R. FERRINI, pag. VIII-187, con 47 incisioni, 2ª ediz. interamente rifatta 1 50
Enimmistica. Guida per comporre e per spiegare Enimmi, Sciarade, Anagrammi, Logogrifi, Rebus, ecc, di D. TOLOSANI (Bajardo), p. XII-516, con 29 ill. e molti esempi . 6 50
Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, di O. OTTAVI, 5ª ediz. di A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, di R. BASSI, p. XVI-289, con 42 inc. . 2 50
— *vedi* Adulterazione vino — Analisi vino - Cantiniere - Cognac - Distillazione - Liquorista - Malattie vini - Mosti - Tannini - Vino.
Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, p. VIII-233 . 2 —
Entomologia di A. GRIFFINI e P. LIOY, 4 vol. — *vedi* Coleotteri - Ditteri - Lepidotteri - Imenotteri.
Epigrafia latina. Trattato elementare con esercizi pratici e facsimili, con 65 tav. di S. RICCI, p. XXXII-448 6 50
— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.
Epilessia. Eziologia, patogenesi, cura, di P. PINI, p. X-277 2 50

L. c.

Europa — *vedi* Storia di.

Evoluzione (Storia dell'), di C. FENIZIA, con breve saggio di Bibliografia evoluzionistica, pag. XIV-389 . . 3 —

Fabbricati civili di abitazione, di C. LEVI, 3ª ediz. rifatta, con 200 incisioni, e i Capitolati d'oneri approvati dalle principali città d'Italia di pag. XII-416 . . . 4 50

Fabbricati rurali (Costr. ed economia dei), V. NICCOLI, 3ª ed. riveduta di p. XVI-335, con 159 fig. 3 50

Fabbro — *vedi* Aritmetica dell'operaio - Fonditore - Meccanico - Operaio - Tornitore.

Fabbro-ferraio (Manuale pratico del), di G. BELLUOMINI, opera necessaria ed indispensabile ai fabbri fucinatori, agli aggiustatori meccanici, armajuoli, carrozzieri, carradori, calderai, di p. VIII-242, con 224 inc. 2 50

Falconiere (Il) moderno. Descrizione dei falchi, cattura educazione, volo e caccia alla selvaggina con gli uccelli di rapina di G. E. CHIORINO, di p. XV-247 con 15 tav. a colori e 80 illustrazioni nel testo . . . . 6 —

Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, 3ª ediz. di pag. X-223, con 104 inc. 2 —

Fallimenti — *vedi* Curatore di

Farfalle — *vedi* Lepidotteri.

Farmacista (Manuale del), di P. E. ALESSANDRI, 3ª ed. rifatta, notevolmente aumentata e corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, alterazioni, falsificazioni, usi, dosi, ecc., di pag. XX-784 con 154 tav. e 85 incis. . . . 6 50

Farmacoterapia e formulario, di P. PICCININI, p. VIII-382 3 50

Fecola (La), sua fabbricaz. e sua trasformaz. in Destrina, Glucosio, Sagou, e Tapioca artificiali, Amido di Mais, di Riso e di Grano. Nozioni gener. sulla sua fabbricaz. Appendice: Sulla coltura del Lupino, di N. ADUCCI, di pag. XVI-285, con 41 inc. intercalate nel testo . . 3 50

Ferrovie — *vedi* Automobili - Macchin. e Fuochista - Strade ferrate - Trazione a vapore - Trasporti e tariffe.

Figure (Le) grammaticali, di G. SALVAGNI (in lavoro).

Filatelia — *vedi* Dizionario filatelico.

Filatura (La) del cotone. Manuale teorico-pratico di G. BELTRAMI, di pag. XV-558, con 196 inc. e 24 tab. 6 50

Filatura e torcitura della seta, di A. PROVASI, di pag. VIII-281, con 75 incis. 3 50

Filologia classica, greca e latina, di V. INAMA, p. XII-195 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, di G. OLIVARI, p. XVI-286 2 50

Filosofia — *vedi* Dizionario di scienze filosofiche - Estetica - Etica - Evoluzione - Logica - Psicologia.

Filosofia del diritto, di A. GROPPALI, pag. XI-378 . . 3 —

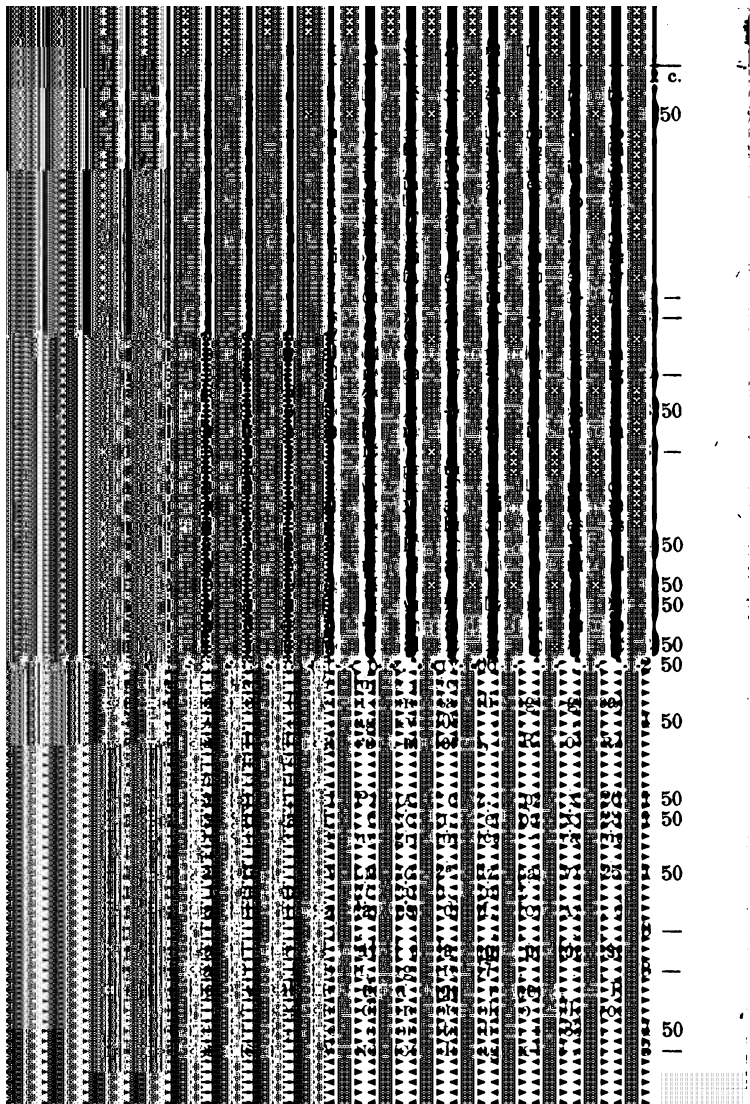
L. c.

Fotocalchi — *vedi* Arti grafiche - Chimica fotografica - Fotografia industriale - Processi fotomeccanici.
Fotocollografia — *vedi* Processi fotomeccanici.
Fotocromatografia (La), di L. SASSI, p. XXI-138, con 19 inc. 2 —
Fotografia (I primi passi in), di L. SASSI, di pag. XVI-183 con 21 inc. e 13 tavole . . . . 2 —
Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per la riproduzione di disegni, piani, ecc. di L. GIOPPI, pagine VIII-208, con 12 inc. e 5 tav. 2 50
Fotografia ortocromatica, di C. BONACINI di pagine XVI-277, con inc. e 5 tavole 3 50
Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole), di G. MUFFONE, 6ª ediz. riveduta ed ampliata, di p. XVI-428 con 290 incisioni e tavole 4 50
Fotografia senza obiettivo, di L. SASSI, di pag. XVI-135, con 127 inc., 12 tavole fuori testo e ritratto dell'aut. 2 50
Fotogrammetria, Fototopografia praticata in Italia e applicazione della fotogrammetria all'idrografia, di P. PAGANINI, pag. XVI-288, con 56 figure e 4 tavole. . . 3 50
Fotolitografia — *vedi* Arti grafiche - Processi fotomecc.
Fotosmaltografia (La), applicata alla decorazione industriale delle ceramiche e dei vetri, di A. MONTAGNA, pag. VIII-200, con 16 inc. nel testo . . . . 2 —
— *vedi anche* Carte fotografiche - Chimica fotografica - Dizionario fotografico - Processi fotomeccanici - Proiezioni - Ricettario fotografico - Spettrofotometria.
Fototerapia e radioterapia — *vedi* Luce e salute.
Fototipografia — *vedi* Arti grafiche - Processi fotomecc.
Fragole — *vedi* Frutta minori.
Francia — *vedi* Storia della Francia.
Francobolli — *vedi* Dizionario filatelico.
Fraseologia francese-italiana, di E. BAROSCHI SORESINI, pag. VIII-262 . . . . 2 50
Fraseologia straniera - *vedi* Conversazione - Dottrina popol.
Frenastenia — *vedi* Ortofrenia.
Frumento (Il), (come si coltiva o si dovrebbe coltivare in Italia), di E. AZIMONTI, 2ª ediz. di pag. XVI-276 . 2 50
Frutta minori. Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, di A. PUCCI, pag. VIII-193, con 96 inc. . . . 2 50
Frutta fermentate — *vedi* Distillazione.
Frutticoltura, di D. TAMARO, 4ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XVIII-233, con 113 inc. intercalate nel testo e 7 tavole sinottiche 2 50
Frutti artificiali — *vedi* Pomologia artificiale.
Fulmini e parafulmini, di CANESTRINI, p. VIII-166 con 6 inc. 2 —
Funghi mangerecci e funghi velenosi, di F. CAVARA, di pag. XVI-192, con 43 tavole e 11 inc. 4 50
Funzioni analitiche (Teoria delle), di G. VIVANTI, pagine VIII-432 (volume doppio) . . . . 3 —
Funzioni ellittiche, di E. PASCAL, pag. 240. . . . . 1 50

L. c.

Geologia, di A. GEIKIE, traduz. di A. STOPPANI, quarta ediz., riveduta sull'ultima edizione inglese da G. MERCALLI, pag. XII-176, con 47 inc. 1 50
Geologo (Il) in campagna e nel laboratorio, di L. SEGUENZA, di pag. XV-305, con inc. . . . . 3 —
Geometria analitica dello spazio, di F. ASCHIERI, pagine VI-196, con 11 inc. 1 50
Geometria analitica del piano, di F. ASCHIERI, pagine VI-194 con 12 inc. 1 50
Geometria descrittiva, di F. ASCHIERI, pag. VI-222, con 108 inc., 2ª ediz. rifatta 1 50
Geometria elementare, (Complementi di) di C. ALASIA, di pag. XV-244 con 117 figure 1 50
Geometria e trigonometria della sfera, di C. ALASIA, pag. VIII-208, con 34 inc. 1 50
Geometria metrica e trigonometria, di S. PINCHERLE, 6ª ediz., pag. IV-158, con 47 inc. 1 50
— *vedi* Trigonometria.
Geometria pratica, di G. EREDE, 4ª ediz. riveduta ed aumentata, pag. XVI-258, con 134 inc. . . . . . 2 —
Geometria projettiva del piano e della stella, di F. ASCHIERI, 2ª ediz., pag. VI-228, con 86 inc. 1 50
Geometria projettiva dello spazio, di F. ASCHIERI, 2ª ediz. rifatta, pag. VI-264, con 16 inc. 1 50
Geometria pura elementare, di S. PINCHERLE, 6ª ediz. con l'aggiunta delle figure sferiche, p. VIII-176 con 121 inc. 1 50
Geometria elementare (Esercizi sulla), di S. PINCHERLE, pag. VIII-130, con 50 inc. 1 50
Geometria elementare (Problemi di) di, I. GHERSI, (Metodi facili per risolverli), con circa 200 problemi risolti, e 119 inc., di pag. XII-160 . . . . 1 50
— *vedi* Euclide emendato
Geometria dell'Operaio — *vedi* Aritmetica.
Ghiaccio — *vedi* Industria frigorifera.
Giardino (Il) infantile, di P. CONTI, pag. IV-213, 27 tav. 3 —
Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, pag. VIII-184 1 50
Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, pag. VI-112, 67 ill. 2 —
Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. GELLI, pag. VIII-108, con 216 inc. . . . . 2 —
— *vedi anche* Acrobatica - Giuochi ginnastici.
Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino — *vedi* Orefice.
— *vedi anche* Leghe metall. - Metallurgia dell'oro - Metalli preziosi - Pietre preziose - Saggiatore - Tavole alligazione.
Giuochi — *vedi* Biliardo - Lawn-Tennis - Scacchi
Giuochi ginnastici per la gioventù delle Scuole e del popolo, di F. GABRIELLI, pag. XX-218, con 24 tav. . . . 2 50
Giuoco (Il) del pallone e gli altri affini. Giuoco del calcio (Foot-Ball), della palla a corda (Lawn-Tennis), della palla al muro (Pelota), della palla a maglio e dello sfratto, di G. FRANCESCHI, di pag. VIII-214, con 34 inc. 2 50

c.
50
—
—
—
50
—
50
50
50
50
50
50
50
50
50
—
—
50
—

L. c.

Grammatica sanscrita — *vedi* Sanscrito.
Grammatica serbo-croata, di G. ANDROVIC (In lavoro).
Grammatica della lingua slovena. Esercizi e vocabolario di B. GUYON, di pag. XVI-314 . . . . 3 —
Grammatica spagnuola, di L. PAVIA, 2ª ediz. riveduta di pag. XII-194 . . . . 1 50
Grammatica della lingua svedese, di E. PAROLI, di pagine XV-293 . . . . 3 —
Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani di F. D'OVIDIO e G. MEYER-LÜBKE. Trad. sulla 2ª ediz. tedesca di E. POLCARI, di pag. XII-301 . . . 3 —
Grammatica tedesca, di L. PAVIA, 2ª ediz. di p. XVIII-272 1 50
Grammatica del Tigrè — *vedi* Tigrè italiano.
Grammatica turca osmanli, con paradigmi, crestomazia, e glossario, di L. BONELLI, di pag. VIII-200 e 5 tavole 3 —
Grandine — *vedi* Assicurazioni.
Granturco — *vedi* Mais - Industria dei molini.
Gravitazione Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare, di Sir G. B. AIRY, traduzione di F. PORRO, con 50 inc., pag. XXII-176 . 1 50
Grecia antica — *vedi* Archeologia (Arte greca) - Atene - Mitologia greca - Monete greche - Storia antica.
Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria), di E. PASCAL, di pag. XI-378 . . . . . . 3 —
Guida numismatica universale, cont. 6278 indirizzi e cenni storico-statistici di collez. pubbliche e private, di numismatici, di società e riviste numism., di incisioni, di monete e medaglie e di negoz. di monete e libri di numismatica, di F. GNECCHI. 4ª ediz., di p. XV-612. . 8 —
Guttaperca — *vedi* Imitazioni.
Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali**, di A. CASALI, pag. XVI-210. . . . . 2 —
Idraulica, di T. PERDONI (E' in lavoro la 2ª ediz.).
— *vedi* Consorzi di difesa del suolo
Idrografia — *vedi* Fotogrammetria.
Idroterapia, di G. GIBELLI, pag. IV-238, con 30 inc. . 2 —
— *vedi anche* Acque minerali e termali del Regno d'Italia.
Igiene dell'alimentazione — *vedi* Bromatologia.
Igiene della bocca e dei denti, nozioni elementari di Odontologia, di L. COULLIAUX, di pag. XVI-330 e 23 inc. 2 50
Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI G., di pag. VIII-262, con 70 inc. 2 50
Igiene della mente e dello studio, di G. ANTONELLI, di pag. XXIII-410 . . . . , ... 3 50
Igiene della pelle, di A. BELLINI, di pag. XVI-240, 7 inc. 2 —
Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª ed. ital. di G. GALLI, di p. XVI-272 2 50
Igiene rurale, di A. CARRAROLI, pag. X-470 . . . . 3 —
Igiene scolastica di A. REPOSSI, 2ª ediz., pag. IV-246. 2 —
Igiene del sonno, di G. ANTONELLI, di p. VI-224 con 1 tav. 2 50

L. c.

Igiene veterinaria, di U. Barpi, di pag. VIII-228. . . 2 —
Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, di A. Lomonaco, di pag. XII-272 . . . . 2 50
Igiene della vita pubblica e privata, G. Faralli, p. XII-250 2 50
Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, di P. Cantoni, pag. XII-142, con 24 inc. e 7 tabelle 1 50
Illuminazione — *vedi* Acetilene - Gaz illum - Incandescenza
Illuminazione elettrica (Impianti di), Manuale pratico di E. Piazzoli, 5ª ediz. interamente rifatta, (9-11 migliaio) seguita da un'appendice contenente la legislazione Ital. relativa agli impianti elettr., di pag. 606, con 264 inc., 90 tab. e 2 tav. (è in lavoro la 6ª ediz.)
Imbalsamatore — *vedi* Naturalista preparatore - Naturalista viaggiatore - Zoologia.
Imbianchimento — *vedi* Industria tintoria - Ricettario industriale.
Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, di E. Griffini (Entomologia IV), di pag. XVI-687, con 243 inc. 4 50
Imitazione di Cristo (Della), Libri quattro di Gio. Gersenio, volgarizzamento di Cesare Guasti, con proemio e note di G. M. Zampini, pag. LVI-396. . . . 3 50
Imitazioni e succedanei nei grandi e piccoli prodotti industriali. Pietre e materiali da costruz. Materiali refrattarî, Carborundum, Amianto, Pietre e metalli preziosi, Galvanoplastica, Cuoio, Seta e fibre tessili, Paste da carta, Materie plastiche, Gomma elastica e Guttaperca, Avorio, Corno, Ambra, Madreperla, Celluloide, ecc. di I. Ghersi, di pag. XVI-591, con 90 inc. 6 50
Immunità e resistenza alle malattie, di A. Galli Valerio, pag. VIII-218 . . . . 1 50
Impalcature — *vedi* Costruzioni.
Impiego ipodermico (L') e la dosatura dei rimedi, Manuale di terapeutica di G. Malacrida, pag. 305 . . 3 —
Imposte dirette (Riscos. delle), di E. Bruni, p. VIII-158 . 1 50
Incandescenza a gas. (Fabbricazione delle reticelle) di L. Castellani, pag. X-140, con 33 inc. . . . . . 2 —
Inchiostri — *vedi* Ricettario industriale - Vernici ecc.
Incisioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte - Raccoglitore di oggetti minuti.
Indovinelli — *vedi* Enimmistica
Industria (L') frigorifera di P. Ulivi. Nozioni fondamentali, macchine frigorifere, raffreddamento dell'aria, ghiaccio artificiale e naturale, dati e calcoli numerici, nozioni di fisica e cenni sulla liquefazione dell'aria e dei gaz, di pag. XII-168, 36 fig. e 16 tab. 2 —
Industria tintoria, di M. Prato. — I. Imbianchimento e Tintura della Paglia; — II. Sgrassatura e imbianchimento della Lana; — III. Tintura e stampa del

L. c.

Cotone in indaco; — IV. Tintura e stampa del Cotone in colori azoici. di pag. XXI-292, con 7 inc. . . 3 —

Industrie elettrochimiche — *vedi* Distillazione del legno.

Industrie Grafiche — *vedi* Arti Grafiche - Litografia - Tipografia.

Industrie (Piccole). Scuole e musei industriali - Industrie agricole e rurali - Industrie manifatturiere ed artistiche, di I. GHERSI, di pag. XII-372 . . . . . 3 50

Infanzia *vedi* Rachitide - Malattie dell' - Giardino infantile - Nutrizione - Ortofrenia - Posologia della terapia infantile - Sordomuto.

Infezione — *vedi* Disinfezione - Medicatura antisettica.

Infortuni della montagna (Gli). Manuale pratico degli Alpinisti, delle guide e dei portatori, di O. BERNHARD, trad. di R. CURTI, di p. XVIII-60, con 65 tav. e 175 figure. 3 50

Infortuni sul lavoro (Mezzi tecnici per prevenirli), di E. MAGRINI, di pag. XXXII-252, con 257 inc. . . . 3 —

— *vedi anche* Legge per gli.

Ingegnere agronomo — *v.* Agricoltore (Pront. dell') - Agronom.

Ingegnere civile. Manuale dell'ingegnere civile e industriale, di G. COLOMBO, 22ª ediz. e aumentata (58° al 60° migliaio), con 231 fig. e una tav., di p. XII-452 . . 5 50

Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC 5 50

— *vedi* Costruzioni.

Ingegnere elettricista, di A. MARRO, di pag. XV-689 con 192 inc. e 115 tabelle 7 50

Ingegnere navale, di A. CIGNONI, di p. XXXII-292, con 36 fig. 5 50

Ingegnere rurale — *vedi* (Prontuario dell') - Agricoltore.

Ingegneria legale — *vedi* Codice dell'Ingegnere.

Inghilterra — *vedi* Storia d'Inghilterra.

Insegnamento (L') **dell'italiano** nelle Scuole secondarie, di C. TRABALZA, di pag. XVI-254 . . . . 1 50

Insetti nocivi, di F. FRANCESCHINI, p. VIII-264, con 96 inc. 2 —

Insetti utili, di F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 42 inc. e 1 tavola . . . . 2 —

Interesse e sconto, di E. GAGLIARDI, 2ª ediz. rifatta e aumentata, pag. VIII-198. . . . . 2 —

Inumazioni — *vedi* Morte vera.

Ipnotismo — *vedi* Magnetismo - Occultismo - Spiritismo - Telepatia.

Ipoteche (Man. per le) di A. RABBENO, di pag. XVI-247 1 50

Islamismo (L'), di I. PIZZI, di pag. VIII-494. . . . . 3 —

Ittiologia italiana, di A. GRIFFINI, con 244 inc. Descriz. dei pesci di mare e d'acqua dolce, di pag. XVIII-469 4 50

— *vedi anche* Piscicoltura - Ostricoltura.

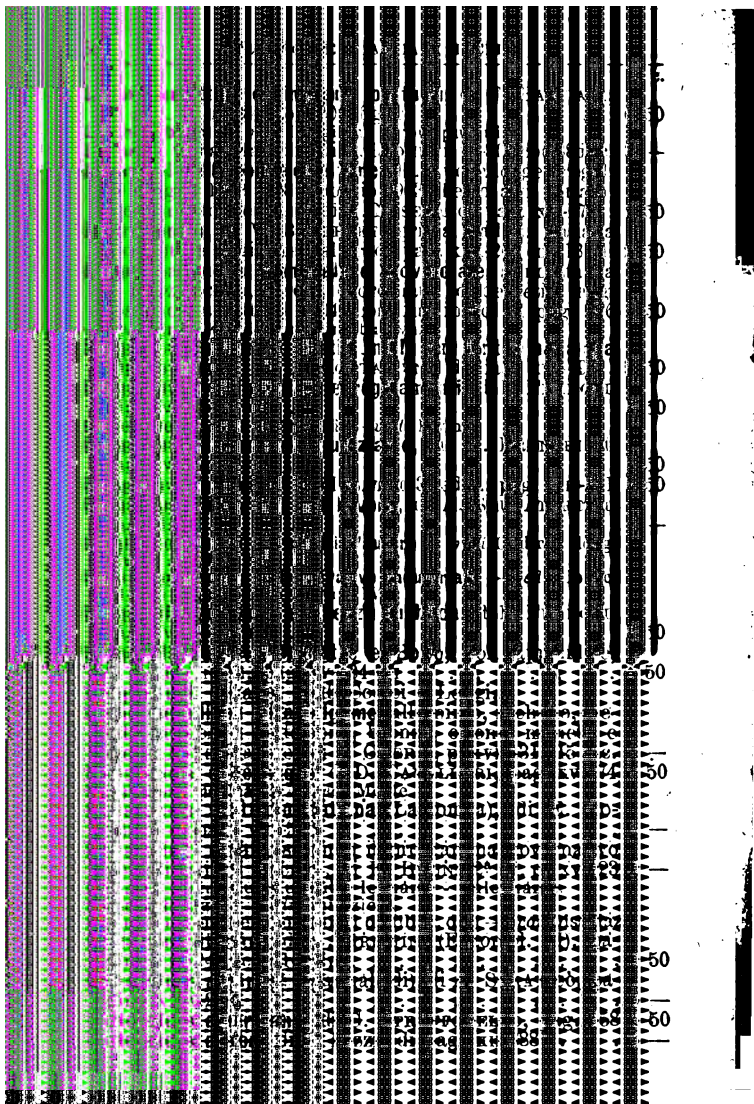
Lacche — *vedi* Vernici ecc.

Lanterna magica — *vedi* Cinematografo.

Laringologia — *v.* Malattie dell'orecchio, del naso e della gola.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, di G. SARTORI, pag. X-162, con 24 inc. . . 2 —

Lavori femminili — *vedi* Abiti per Signora - Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Trine a fuselli.

L. c.

— *vedi anche* Islamismo.

Letteratura assira, di B. TELONI, pag. xv-266 e 3 tav. 3 —

Letteratura catalana, di A. Restori (In lavoro).

Letteratura danese — *vedi* Letteratura norvegiana.

Letteratura drammatica, di C. LEVI, pag. XII-339 . . 3 —

Letteratura ebraica, di A. REVEL, 2 vol. pag. 364 . . 3 —

Letteratura egiziana, di L. BRIGIUTI. (In lavoro).

Letteratura francese, di E. MARCILLAC, traduz. di A. PAGANINI, 3ª ediz., pag. VIII-198 . . . . 1 50

Letteratura greca, di V. INAMA. 14ª ediz. riveduta (dal 56° al 61° migliaio), pag. VIII-236 e una tavola . . 1 50

Letteratura indiana, di A. DE GUBERNATIS, p. VIII-159 1 50

Letteratura inglese, di E. SOLAZZI, 2ª ed. di p. VIII-194 1 50

Letteratura italiana, di C. FENINI, dalle origini al 1748 5ª ed. complet. rifatta da V. FERRARI, p. XVI-291 . 1 50

Letteratura italiana moderna (1748-1870). Aggiunti 2 quadri sinottici della letteratura contemporanea (1870-1901), di V. FERRARI, pag. 290 . . . . 1 50

Letteratura italiana moderna e contemporanea 1748-1903. di V. FERRARI, di pag. VIII-429 . . . . . 3 —

Letteratura militare (Nozioni di) compilate secondo i programmi del Minist. della Guerra, da E. MARANESI, di pag. VIII-224 . . . . 1 50

Letteratura latina — *vedi* Letteratura romana.

Letteratura norvegiana, di S. CONSOLI, p. XVI-272 . . 1 50

Letteratura persiana, di I. PIZZI, pag. x-208 . . . . 1 50

Letteratura pratica, di A. DE GUARINONI, (in lavoro).

Letteratura provenzale, di A. RESTORI, pag. x-220 . . 1 50

Letteratura romana, di F. RAMORINO, 6ª ediz. corretta (dal 23° al 27° migliaio), di pag. VIII-349 . . . . . 1 50

Letteratura rumena di R. LOVERA (in lavoro).

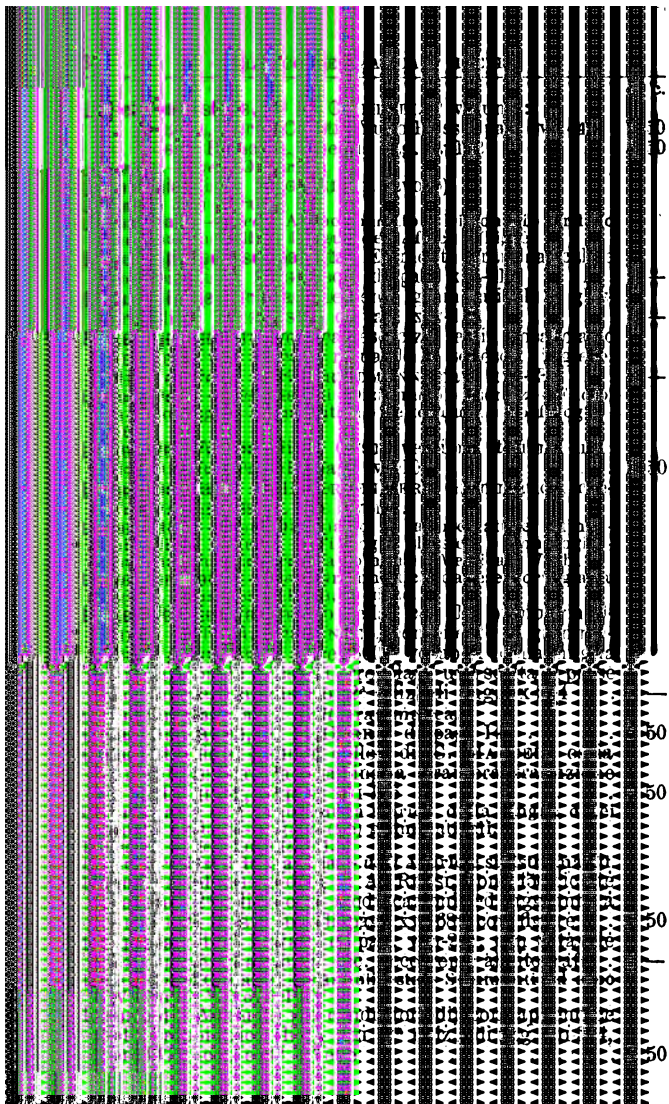
Letteratura spagnuola e portoghese, di L. CAPPELLETTI 2ª ediz. rifatta da B. SANVISENTI (In lavoro).

Letteratura tedesca, di O. LANGE, 3ª ediz. rifatta da R. MINUTTI, pag. XVI-188 . . . . 1 50

Letteratura ungherese, di ZIGANY ARPÀD, p. XII-295 . 1 50

Letteratura universale (Compendio di) di P. PARISI, di pag. VIII-391 . . . . 3 —

Letteratura — *vedi anche* Arabo parlato - Arte del dire - Corrispondenza - Conversazione - Crittografia - Dantologia - Dialetti - Dizionari - Dottrina - Enciclopedia - Esercizi - Filologia - Fonologia - Fraseologia - Glottologia - Grammatiche - Leggende - Lingua - Metrica dei greci e rom. - Morfologia greca - Id. italiana - Omero - Ortoepia e ortografia - Paleografia - Relig. e ling. di India Rettorica - Ritmica italiana - Sanscrito - Shakespeare - Sintassi francese - Sintassi latina - Stilistica - Stilistica latina - Tigrè - Traduttore - tedesco - Verbi greci - Verbi latini - Vocabol. russo - Volapuk.

L. c.

— *vedi* Automobili - Macchinista - Trazione a vapore.

Logaritmi (Tavole di), con 6 decimali, di O. MULLER, 8ª ediz. aumentata dalle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. RAINA, di pagine XXXVI-191. (11, 12, 13° migliaio) 1 50

Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. di C. CANTONI, 5ª ediz. di pag. VIII-166, con 15 inc. 1 50

Logica matematica, di C. BURALI-FORTI, p. VI-158 . . 1 50

Logismografia, di C. CHIESA. 3ª ediz., pag. XIV-172 . 1 50

Logogrifi — *vedi* Enimmistica.

Lotta — *vedi* Pugilato.

Luce e colori, di G. BELLOTTI, pag. X-157, con 24 inc. 1 50

Luce e suono, di E. JONES, traduzione di U. FORNARI, di pag. VIII-336, con 121 inc. . . . . —

Luce e salute. Fototerapia e radioterapia, di A. BELLINI, di pag. XII-362, con 65 figure 3 50

Lupino — *vedi* Fecola.

Lupus — *vedi* Luce e salute.

Macchine (Atlante di) e di Caldaie, con testo e note di tecnologia, di S. DINARO di pag. XV-80, con 112 tavole e 170 figure in iscala ridotta . . . . 3 —

Macchine (Il Montatore di). Opera arricc, da oltre 250 es. pratici e problemi risolti, di S. DINARO, pag. XII-468 4 —

Macchine agricole — *vedi* Meccanica agraria.

Macchine a vapore (Manuale del costruttore di), di H. HAEDER. 2ª edizione italiana con notevoli aggiunte di E. WEBBER (In lavoro).

Macchine per cucire e ricamare, di A. GALASSINI, pag. VII-230, con 100 inc. 2 50

Macchinista e fuochista, di G. GAUTERO, riveduto e ampliato da L. LORIA, 10ª ediz. con Appendice sulle locomobili e le locomotive e del Regolamento sulle caldaie a vapore di pag. XX-194, con 34 inc. . . . 2 —

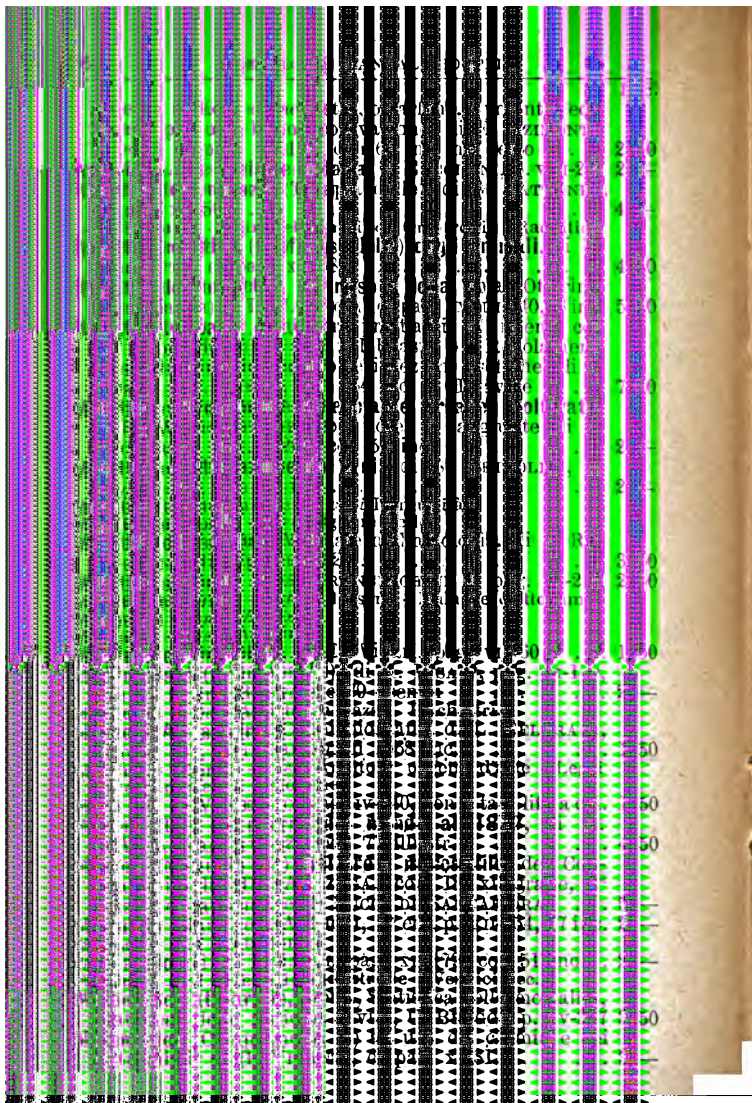
Macinazione — *vedi* Industrie dei molini - Panificazione.

Magnetismo ed elettricità. Principi e applicazioni esposti elementarmente, di F. GRASSI, 3ª ediz. di pag. XVI-508, con 280 figure 6 tavole 5 50

Magnetismo e ipnotismo, di G. BELFIORE, 2ª ed. rifatta pag. VIII-396 . . . . 3 50

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, di E. MARCHI, 2ª ed. pag. XX-736, con 190 inc. e una Carta 6 50

Maioliche e porcellane (L'amatore di), di L. DE MAURI, illustrato da 3000 marche e da 12 tavole a colori. Contiene: Tecnica della fabbricazione - Cenni storici ed artistici - Dizionario di termini — Prezzi correnti - Bibliografia ceramica, pag. XII-650 . . . . 12 50

Mais (Il) o granoturco, o formentone, o granone, o mel-

L. c.

atematiche — *vedi* Algebra - Aritmetica - Astronomia - Calcolo - Celerimensura - Compensazione errori - Computisteria - Conti e calcoli fatti - Cubatura legnami - Curve - Determinanti - Disegno - Economia matematica - Equilibrio corpi - Euclide (L') emendato - Formulario di matemat. - Fotogrammetria - Funzioni analitiche - Id. ellittiche - Geometria - Gnomonica - Gruppi di trasformaz. - Gravitaz. - Interesse e sconto - Logaritmi - Logica matematica - Logismografia - Matematica (compl. di) - Matematiche superiori - Metrologia - Peso metalli - Prospettiva - Ragioneria - Ragioniere - Regolo calcolatore - Repertor. di matematica - Stereometria - Strumenti metrici - Telemetria - Teoria dei numeri - Teoria d. ombre - Termodinamica Triangolazioni - Trigonometria.

Matematiche superiori (Repertorio di), Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici, di E. Pascal.
Vol. I. *Analisi*, pag. XVI-642 . . . . 6 —
Vol. II. *Geometria*, e indice per i 2 vo [illegible] 9 50

Materia medica moderna (Man di), di G. Malacrida, pag. XI-761 . . . . 7 50

Mattoni e pietre di sabbia e calce (Arenoliti) in relazione specialmente al processo di indurimento a vapore sotto alta pressione, di E. Stoffler e M. Glasenapp. Ediz. italiana con note ed aggiunte di G. Revere, di pag. VIII-232, con 85 figure e 3 tavole . 3 —
— *vedi* Calcestruzzo - Calci e cementi - Imitazioni.

Meccanica, di R. Stawell Ball traduz. di J. Benetti 4ª ed. pag XVI-214, con 89 inc. 1 50

Meccanica agraria di V. Niccoli.
Vol. I. *Lavorazione del terreno*. I lavori del terreno. - Strumenti a mano per la lavorazione delle terre - Dell'aratro e delle arature - Strumenti per lavori di maturamento e di colturamento - Trazione funicolare e meccanica - Strumenti da tiro per i trasporti, di pag. XII-410, con 257 inc. . . 4 —
Vol. II. *Dal seminare al compiere la prima manipolazione dei prodotti*. Macchine e strumenti per seminare e concimare - Per il sollevamento delle acque - Per la raccolta dei prodotti - Per la conservazione e preparazione dei foraggi - Per trebbiare - Sgranare - Pulire - Dicanapulare e per la conservazione dei prodotti agrari, di pag. XII-426, con 175 incis. . . . . 4 —

Meccanica (La) del macchinista di bordo, per gli ufficiali macchinisti della R. Marina, i Costruttori e i Periti meccanici, gli Allievi degli Istituti Tecnici e Nautici, ecc. di E. Giorli, con 92 figure 2 50

Meccanica razionale di R. Marcolongo.
I. Cinematica-Statica, di pag. XII-271. 3 inc. . . 3 —
II. Dinamica, Principi di Idromecc., di p. VI-324, 24 inc. 3 —

Meccanico (Il), ad uso dei capi tecnici, macchinisti, elet-

L. c.

tric., disegnat., assist., capi operai, condutt. di cald. a vap., scuole ind., E. GIORLI, 4ª ediz. p. xv-423, 204 inc. 3 —

Meccanismi (500), scelti fra i più import. e recenti riferentisi alla dinamica, idraul., idrostat., pneumat., di T. BROWN, trad. F. CERRUTI. 4ª ed. ital., VIII-176, 500 inc. 2 50

Medicamenti — *vedi* Farmacista - Farmacoter. - Impiego ipodermico - Materia medica - Medicat. antis. - Posologia - Sieroterapia.

Medicatura antisettica, di A. ZAMBLER, con prefazione di E. TRICOMI, pag. XVI-124, con 6 incis. 1 50

Medicina legale, di M. CARRARA (In lavoro).

Medicina — *vedi* Acque miner. e term. - Anatomia microscopica - Anatomia topografica - Animali parassiti dell'uomo - Antropometria - Aromatici - Assistenza infermi - Id. pazzi - Batteriologia - Bromatologia - Chimica applicata all'igiene - Chimica clinica - Chimica legale - Chirurgia operativa - Climatologia - Disinfez. (Pratica d.) Elettricità medica - Embriologia - Epilessia - Fisiologia - Fototerapia - Idroterapia - Igiene - Immunità malatt. - Infortuni d. montagna - Legislazione sanitaria - Luce e salute - Malattie dei paesi caldi - Malattie del sangue Malattie infanzia - Malattie sessuali - Massaggio - Medicina legale - Medico pratico - Microbiologia - Microscopio Morte vera e appar. - Nevrastenia - Nutrizione bambini - Organoterapia - Ortofrenia - Ostetricia - Pellagra - Protistologia - Psichiatria - Psicologia fisiolog. - Psicoterapia - Rachitide - Radioterapia - Röntgen Raggi - Semejotica Soccorsi d'urgenza - Spettrofotometria - Tisici e sanatori - Ufficiale sanitario - Veleni - Zoonosi.

Medico pratico, (Il) di C. MUZIO. 3ª ediz. del Nuovo memoriale pei medici pratici, di pag. XVI-492 . . . 5 —

Memoria (L'arte della) — *vedi* Arte.

Mercedi — *vedi* Paga giornaliera.

Merciologia, ad uso delle scuole e degli agenti di commercio, di O. LUXARDO, pag. XII-452 . . . . . . 4 —

Merceologia tecnica, P. E. ALESSANDRI: Vol. I. Materie prime (gregge e semilavorate) di uso commerciale e industriale (in lav.). — Vol. II. Prodotti chimici (inorganici e organici) di uso comm. e industr. (in lav.). — *vedi* Analisi volumetrica - Chimica applicata all'igiene.

Meridiane — *vedi* Gnomonica.

Metalli preziosi, di A. LINONE. Dell'argento: Metallurgia dell'arg. - Arg. puro - Leghe d'arg. - Saggi dell'arg. Dell'oro: Giacimento dell'oro - Affinamento dell'oro - Leghe d'oro - Saggi dell'oro. - Platino: estraz. e leghe di platino - Applicaz. dell'oro e dell'argento - Decorazione dei metalli preziosi, di pag. XI-315 . —

Metallizzazione — *vedi* Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia.

Metallocromia. Color. e decor. chim. ed elettr. dei metalli, bronz., ossid., preserv. e pul., I. GHERSI. VIII-192 2 50

Metallurgia dell'oro, E. CORTESE, pag. XV-262. con 35 inc. 3 —

Metallurgia — *vedi* Coltivazione delle miniere - Fonditore

L. c.

- Leghe metalliche - Ricettario di metallurgia - Siderurgia - Tempera e cementazione.

Meteorologia generale, di L. De Marchi, 2ª ediz. ampliata di pag. xv-225, con 13 figure e 6 tavole . . . 1 50

— *vedi anche* Climatologia - Igroscopi.

Metrica dei greci e dei romani, di L. Müller, 2ª ed. italiana confrontata colla 2ª tedesca ed annotata da G. Clerico, pag. xvi-186 . . . . 1 50

Metrica italiana — *vedi* Ritmica e metrica italiana.

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale**, coll'indice alfabet. di tutti i pesi misure, monete, ecc. di A. Tacchini, pag. xx-482 . . . . 6 50

Mezzeria (Man. prat. della) e dei vari sistemi della colonia parziaria in Italia di A. Rabbeno, di pag. viii-196 1 50

Micologia - *vedi* Funghi - Malattie crittog Tartufi e funghi.

Microbiologia. Perchè e come dobbiamo difenderci dai microbi. Malattie infettive. Disinfezioni, Profilassi, di L. Pizzini, pag. viii-142. . . . . 2 —

Microscopia — *vedi* Anatomia microscopica - Animali parassiti - Bacologia - Batteriologia - Chimica clinica - Protistologia - Tecnica protistologica.

Microscopio (Il), Guida elementare alle osservazioni di microscopia, di C. Acqua, (esaurito la 2ª ed. è in lavoro)

Mimica — *vedi* Fisionomia.

Mineralogia generale, di L. Bombicci, 3ª ed. per cura di P. Vinassa de Regny, con 193 figure e due tavole a colori, di pag. xvi-220 . . . . 1 50

Mineralogia descrittiva, di L. Bombicci, 2ª ediz., di pag. iv-300, con 119 incis. . . . . 3 —

Miniere (Coltiv. delle), di S. Bertoglio, 2ª ed. rifatta del Man. « *Arte Min.* » di V. Zoppetti, di p. viii-284 2 50

Miniere di zolfo — *vedi* Zolfo.

Misurazione delle botti — *vedi* Enologia.

Misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi - Codice del Perito misuratore - Metrologia - Monete - Strum. metrici.

Mitilicoltura — *vedi* Ostricoltura - Piscicoltura.

Mitologia (Dizionario di), di F. Ramorino. (In lavoro).

Mitologia class. illustr., F. Ramorino, 2ª ed. corr., 91 inc. 3 —

Mitologia greca, di A. Foresti: I. *Divinità*, p. viii-284 1 50
II. *Eroi*, di pag. 188 . . . . 1 50

Mitologie orientali, di D. Bassi:
Vol. I. *Mitologia babilonese-assira*, pag. xvi-219 . 1 50
Vol. II. *Mitologia egiziana e fenicia* (In lavoro).

Mnemotecnia — *vedi* Arte della memoria.

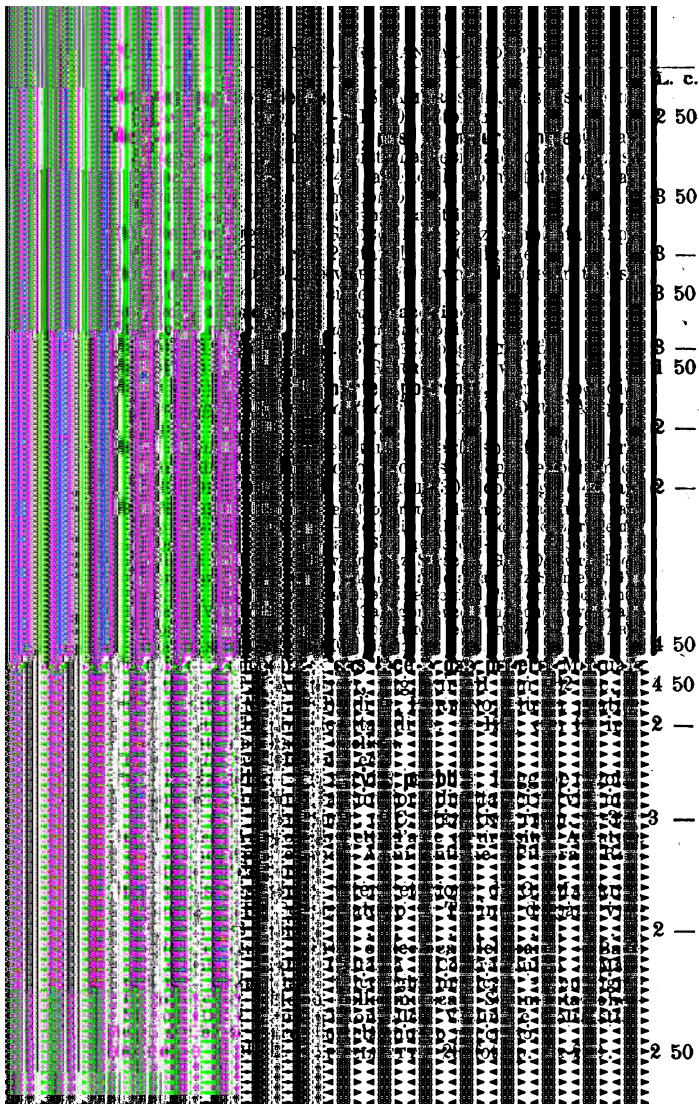
Mobili artistici — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte.

Moda *vedi* Abiti - Biancheria - Fiori artificiali - Trine.

Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, di G. Mina, pag. xvii-428, con 293 incis. e 1 tavola. . . 5 50

Molini (L'Industria dei). Costruz., impianti, macinaz., di C. Siber-Millot, 2ª ed. rif., p. xvii-296, 161 inc., 3 tav. 5 —

Monete greche, S. Ambrosoli, xiv-286, 200 fotoinc., 2 c. g. 3 —

L. c.

Naso (Malattie del) *vedi* Oto-rino-laringojatria.

Naturalista preparatore (Il) (Imbalsamatore) di R. GESTRO, 3ª ediz. riveduta di pag. XVI-168, con 42 inc. 2 —

Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 inc. . . . . . . 2 —

Nautica — *vedi* Astronomia nautica - Attrezzatura navale - Avarie e sinistri marittimi - Canottaggio - Codice di marina - Costruttore navale - Disegno e costruzione navi - Doveri macchinista navale - Filonauta - Flotte moderne - Ingegnere navale - Lavori marittimi - Macchinista navale - Marine da guerra - Marino - Meccanica di bordo.

Nautica stimata o Navigazione piana, di F. TAMI, di pag. XXXII-179. con 47 inc.. . . . . 2 50

Neurotteri — *vedi* Imenotteri.

Nevrastenia di L. CAPPELLETTI, di pag. XX-490 . . . 4 —

Nichelatura — *vedi* Galvanostegia.

Notaio (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. GARETTI, 5ª ediz. ampliata di p. VIII-383 . 3 50

Numeri — *vedi* Teoria dei numeri.

Numismatica. Atlante numismatico italiano, Monete moderne di S. AMBROSOLI, p. XVI-428, 1746 fotoinc. . . . 8 50

Numismatica (Manuale di), di S. AMBROSOLI, 3ª ediz. riveduta, pag. XVI-250, 250 fotoinc. e 4 tavole . . . 1 50

— *vedi* Atene - Guida numismatica - Monete greche, papali, romane Vocab. numismatico.

Nuotatore (Manuale del), di P. ABBO, p. XII-148, con 97 inc. 2 50

Nutrizione del bambino. Allattamento naturale ed artificiale, di L. COLOMBO, pag. XX-228, con 12 inc. . . 2 50

Oceanografia, di G. MAGRINI (In lavoro).

Occultismo, di N. LICÒ, di pag. XVI-328, con tav. illustr. 3 —

— *vedi* Chiromanz. - Magnetismo - Spiritismo - Telepatia.

Oculistica — *vedi* Igiene della vista - Ottica.

Odontologia — *vedi* Igiene della bocca.

Olandese (lingua) — *vedi* Dizionario - Grammatica.

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni di G. GORINI, 2ª ediz. completamente rifatta da G. FABRIS, di pag. VIII-214, con 7 incis. . . . . 2 —

Olivo ed olio. Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio, di A. ALOI, 5ª ed. accresciuta e rinnovata, di p. XVI-365, con 65 inc. . 3 —

Omèro, di W. GLADSTONE, traduzione di R. PALUMBO, e C. FIORILLI, di pag. XII-196 . . . . 1 50

Onde Hertziane *vedi* Telegrafo senza fili

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti aggiustatori e meccanici, di G. BELLUOMINI, 6ª ediz. di p. XVI-272. . . 2 —

Operaio elettrotecnico (Manuale pratico per l'), di G. MARCHI, 2ª ed. di pag. XX-410, con 265 inc. . . . 3 —

Operazioni doganali - *vedi* Codice dogan. - Trasporti e tariffe.

Opere pie — *vedi* Enciclopedia amministrativa.

L. c.

soda - Piante medicinali - Piante da diversi impieghi, 3ª ed. rifatta da A. ALOI, del manuale « Piante industriali » del GORINI, di pag. XI-274, con 64 inc. . . 2 50

Piante tessili (Coltivazione ed industrie delle), propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori di intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, di M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII-476, con 72 inc. . . 5 —

Pietre artificiali — *vedi* Imitazioni

Pietre preziose, classificazione, valore, arte del giojelliere, di G. GORINI, (esaurito, è in lavoro la 3ª ediz.)

Pirotecnia moderna, di F. DI MAIO, 2ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XV-183 con 21 inc. . . . 2 50

Piscicoltura d'acqua dolce, di E. BETTONI, di pagine VIII-318, con 85 inc. . . . . 3 —

Pittura ad olio, acquerello e miniatura (Man. per dilettante di), (paesaggio, figura e fiori) di G. RONCHETTI, di p. XVI-239, 29 inc. e 24 tav. 4 00

Pittura italiana antica e moderna, di A. MELANI, 2ª ediz. rifatta, di pag. XXX-430 con 23 inc. e 137 tav. 7 50

— *vedi* Anatomia pittorica - Colori e pittura - Decoraz. - Disegno - Luce e colori - Ristauratore dipinti - Scenografia.

Plastica — *vedi* Imitazioni.

Pneumonite crupale con speciale riguardo alla sua cura di A. SERAFINI, di pag. XVI-222 . . . . 2 50

Polizia sanitaria degli animali (Manuale di), d A. MINARDI, di pag. VIII-333, con 7 inc. . . . . 3 —

Pollicoltura, di G. TREVISANI, 5ª ediz. rifatta, di pag. XVI-230, con 90 incis. 2 50

Polveri piriche — *vedi* Esplodenti — Pirotecnia.

Pomologia, descrizione delle migliori varietà di Albicocchi, Ciliegi, Meli, Peri, Peschi, di G. MOLON, con 86 incis. e 12 tavole colorate, di pag. XXXII-717 . . . 8 50

Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, di M. DEL LUPO, pag. VI-132, e 34 inc. . . . . . 2 —

Poponi — *vedi* Frutta minori.

Porcellane - *vedi* Maioliche - Ricettario domestico.

Porco (Allevamento del) — *vedi* Maiale.

Porti di mare — *vedi* Lavori marittimi.

Posologia (Prontuario di) dei rimedi più usati nella terapia infantile di A. CONELLI, di pag. VIII-186. . . 2 —

— *vedi* Impiego ipodermico.

Posta. Manuale postale, di A. PALOMBI. Notizie storiche sulle Poste d'Italia, organizzazione, legislazione, posta militare, unione postale universale, con una appendice relativa ad alcuni servizi access., pag. XXX-309 3 —

Prato (Il), di G. CANTONI, di pag. 146, con 13 inc. . 2 —

Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresa la Valsassina ed i Passi alla Valtellina ed alla Valcamo-

L. c.

nica, colla prefaz. di A. STOPPANI, e cenni geologici di A. TARAMELLI, 3ª ediz. rifatta per cura della Sezione di Bergamo del C. A. I., con 15 tavole, due carte topografiche, ed una carta e profilo geologico. Un vol. di p. 290 e un vol. colle carte topografiche in busta . 6 50

Pregiudizi — *vedi* Errori e pregiudizi - Leggende popolari.

Prestiti ipotecari — *vedi* Estimo dei terreni.

Previdenza — *vedi* Assicuraz. - Cooperazioni - Società di M. S.

Privative industriali — *vedi* Codice e leggi d'Italia Volume IV.

Procedura civile - Procedura penale — *vedi* Codici.

Procedura privilegiata fiscale per la riscossione delle imposte dirette — *vedi* Esattore.

Procedura dei piccoli fallimenti — *vedi* Curat. dei fallimenti.

Processi fotomeccanici (I moderni). Fotocollografia, fototipogr. fotocalcografia, fotomodellatura, tricromia, di R. NAMIAS, di p. VIII-316, 53 fig., 41 illust. e 9 tavole . 3 50

Prodotti agrari — *vedi* Conservazione dei.

Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), di A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zucchero, il pepe, il tabacco, il cacao, il tè, il dattero, il cotone, il cocco, la coca, il baniano, l'aloè, l'indaco, il tamarindo, l'ananas, l'albero d. chinino, la juta, pag. XVI-270 2 —

Produzione e commercio del vino in Italia, di S. MONDINI, di pag. VII-303 . . . . 2 50

Profumiere (Manuale del), di A. ROSSI, con 700 ricette pratiche, di pag. IV-476 e 58 inc. . . . . 5 —

— *vedi anche* Ricettario domes. - Ricettario indust. - Saponi.

Proiezioni (Le), Materiali, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali, policrome, stereoscopiche, panoramiche, didattiche, ecc. di L. SASSI, di pag. XVI-447, con 141 inc. . . . . 5 —

— *vedi* Cinematografo.

Proiezioni ortogonali — *vedi* Disegno.

Prontuario di geografia e statistica, di G. GAROLLO, p. 62 1 —

Prontuario per le paghe — *vedi* Paghe - Conti fatti.

Proprietà letteraria, artistica e industriale — *vedi* Leggi.

Proprietario di case e di opifici. Imposta sui fabbricati, di G. GIORDANI, di pag. XX-264 . . . . 1 50

Prosodia — *vedi* Metrica dei greci e dei romani - Ritmica.

Prospettiva (Manuale di), di L. CLAUDI, 2ª ediz. riveduta di pag. XI-61 con 28 tavole. . . . . 2 —

Protezione degli animali (La), di N. LICÒ, p. VIII-200 . 2 —

Protistologia di L. MAGGI, 2ª ediz. p. XVI-278 con 93 inc. 3 —

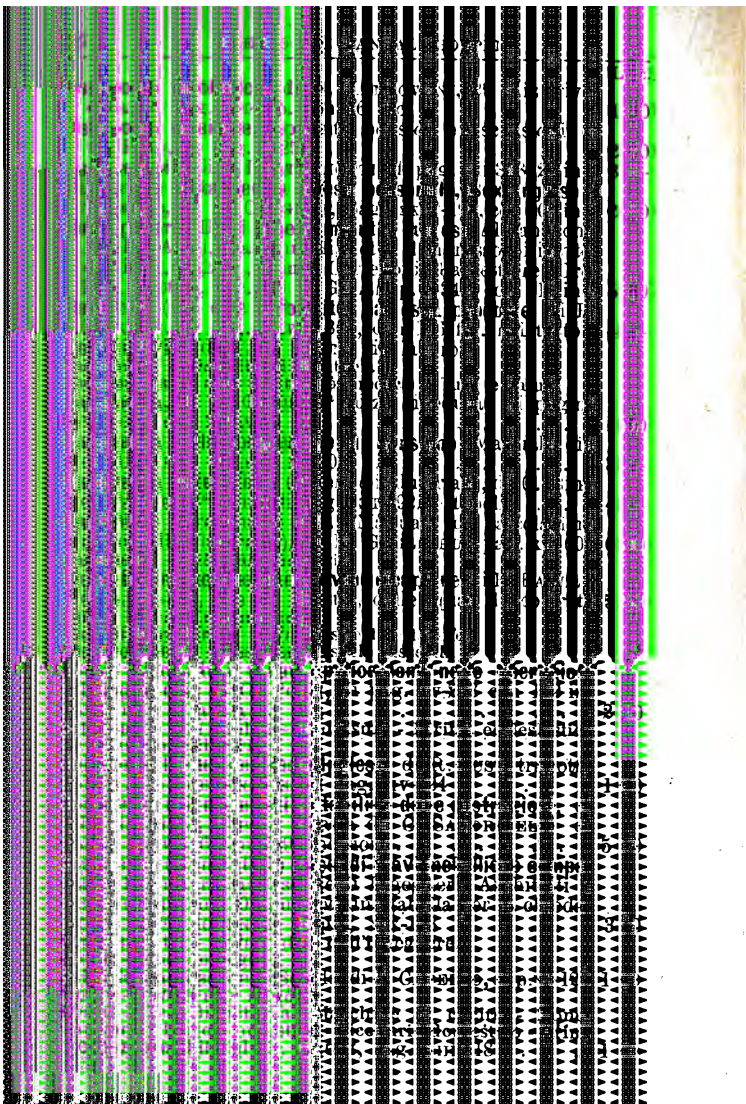
Proverbi in 4 lingue — *vedi* Dottrina popolare.

Proverbi (516) **sul cavallo** , raccolti ed annotati da C. VOLPINI, di pag. XIX-172 . . . . 2 50

Psichiatra. Confini, cause e fenomeni della pazzia. Concetto, classificazione, forme cliniche o diagnosi delle materie mentali. Il manicomio, di J. FINZI. p. VIII-225 2 50

— *vedi* Antropologia criminale.

Psicologia, di C. CANTONI, pag. VIII-168, 2ª ediz. . . 1 50

L. c.

Ricettario domestico, di I. GHERSI. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibil e illuminazione. Detersione e lavatura, smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta Igiene e medicina. Mastici e plastica. Colle e gomme. Vernici ed encaustici. Metalli. Vetrerie, 3ª ediz rifatta da A. CASTOLDI. pag. XVI-854. con 4280 ricette e 59 incis. 7 50

Ricettario industriale, di I. GHERSI. Procedimenti utili nelle arti, industrie e mestieri, caratteri; saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali di uso comune; colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno. fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro; metalli, bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera, leghe; filtrazione; materiali impermeabili, inconbustibili, artificiali; cascami, olii. saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, imbianchimento; agricoltura, elettricità; 4ª ediz. riveduta e corretta dell'Ing. P. MOLFINO, pag. VII-704 con 27 incis e 2887 ricette. 6 50

Ricettario fotografico, 3ª ed. di L. SASSI, pag. XXIV-229 2 —

Ricettario pratico di metallurgia. Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili, dedicato agli studiosi e agli operai meccanici, aggiustatori, tornitori, fabbri ferrai, ecc. di G. BELLUOMINI, di pag. XII-328. . . 3 50

Rilievi — *vedi* Cartografia - Compens. errori - Telemetria.

Rimboschimento — *vedi* Consorzi di difesa del suolo - Selvicoltura.

Rimedi — *vedi* Impiego ipodermico - Mat. medica - Posologia

Risorgimento italiano (Storia del) **1814-1870,** con l'aggiunta di un sommario degli eventi posteriori, di L. BERTOLINI, 2ª ediz. di pag. VIII-208 . . . . . 1 50

Ristauratore dei dipinti (Il), di G. SECCO-SUARDO, 2 volumi, di pag. XVI-269, e XII-362 con 47 inc. . . . 6 —

Ritmica e metrica razionale italiana, di R. MURARI, di pag. XVI-216 . . . . 1 50

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), di G. P. SOLERIO di pag. IV-176 . . . . 1 50

Roma antica — *vedi* Antichità private - Antichità pubbliche - Archeologia d'arte etrusca e romana - Mitologia - Monete - Topografia.

Röntgen (I raggi di) **e le loro pratiche applicazioni,** di I. TONTA, di pag. VIII-160, con 65 inc. e 14 tavole . 2 50

— *vedi* Elettrecità medica - Fototerapia e radioterapia.

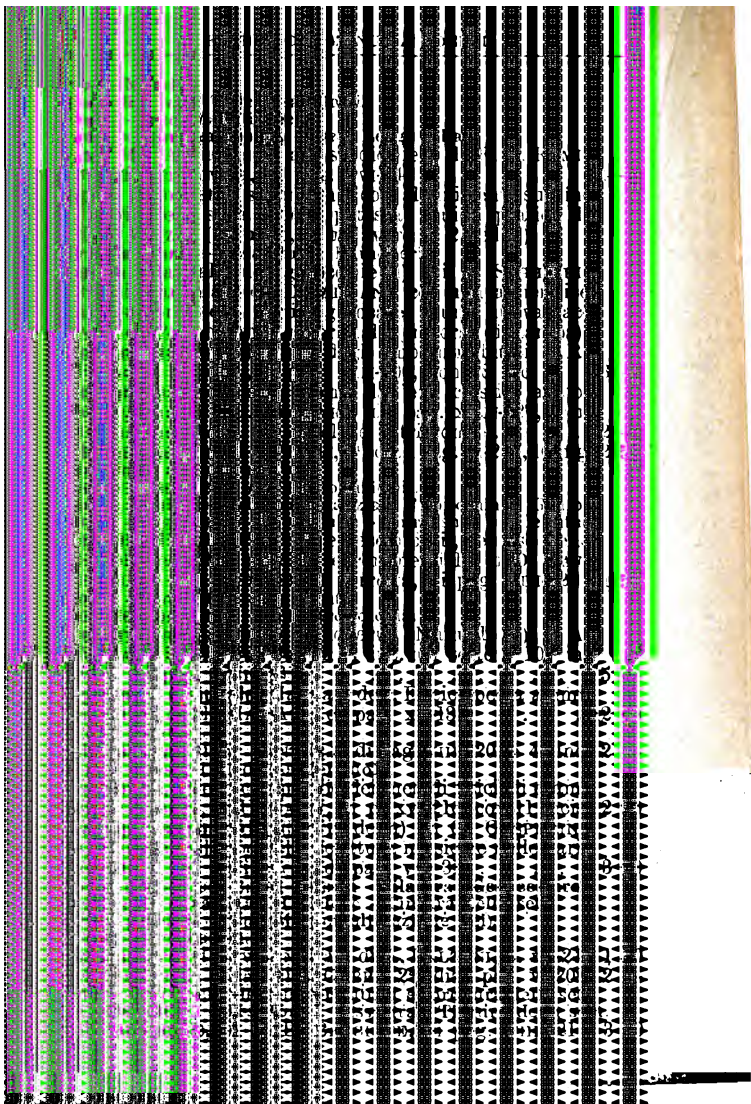
Rose (Le). Storia, coltivazione, varietà, di G. GIRARDI, di pag. XVIII-284, con 96 illustr. e 8 tav. cromolit. . 3 50

Rhum — *vedi* Liquorista.

Saggiatore (Man. del), di F. BUTTARI, di pag. VIII-245. 2 50

Sale (Il) **e le saline,** di A. DE GASPARIS. (Processi industriali, usi del sale, prodotti chimici, industria manifatturiera, industria agraria, il sale nell'economia pubblica e nella legislazione), di pag. VIII-358, 24 inc. 3 50

Salsamentario (Manuale del) di L. MANETTI, di pagine 224, con 76 incisioni . . . . 2 —

L. c.

— *vedi* Imitazioni.

Sfere cosmografiche e loro applicazione alla risoluzione di problemi di geografia matem., A. ANDREINI (in lav.).

Sicurezza pubblica — *vedi* Leggi di sanità.

Siderurgia (Man. di), V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura di E. GARUFFA, di p. IV-368, con 220 incis. 5 50

Sieroterapia, di E. REBUSCHINI, di pag. VIII-424 . . 3 —

Sigle epirafiche — *vedi* Dizionario di abbreviature.

Sindaci (Guida teorico-pratica pei), Segretari comunali e provinciali e delle opere pie, di E. MARIANI — *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Sinistri marittimi — *vedi* Avarie.

Sintassi francese, razionale pratica, arricchita della parte storico-etimologica, della metrica, della fraseologia commerciale ecc., di D. RODARI, di pag. XVI-206. . 1 50

Sintassi francese — *vedi* Esercizi sintattici.

Sintassi greca, di V. QUARANTA, di pag. XVIII-175. . 1 50

Sintassi latina, di T. G. PERASSI, di pag. VII- 168. . 1 50

Sismologia, di L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incis. 1 50

Smalti — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte - Fotosmaltografia - Ricettario industriale.

Soccorsi d'urgenza, di C. CALLIANO, 6ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XL-428, con 134 incis. e 1 tav. . 3 50

— *vedi* Infortuni della montagna.

Socialismo, di G. BIRAGHI, di pag. XV-285 . . . . . 3 —

Società di mutuo soccorso. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte di G. GARDENGHI, di pag. VI-152. . . . . 1 50

Società industriali italiane per azioni, di F. PICCINELLI, di pag. XXXVI-534 . . . . 5 50

— *vedi* Debito pubblico - Prontuario del ragioniere - Valori pubblici.

Sociologia generale (Elementi di), di E. MORSELLI, di pag. XII-172 . . . . 1 50

Soda caustica, cloro e clorati alcalini per elettrolisi. Fabbricaz. chimica, P. VILLANI, p. VIII-314, e una tav. 3 50

Sorbettiere — *vedi* Caffettiere.

Sonno — *vedi* Igiene del.

Sordomuto (Il) **e la sua istruzione.** Manuale per gli allievi e allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, di P. FORNARI, di pag. VIII-232, con 11 inc. 2 —

— *vedi anche* Ortofrenia.

Sostanze alimentari — *vedi* Conservazione delle.

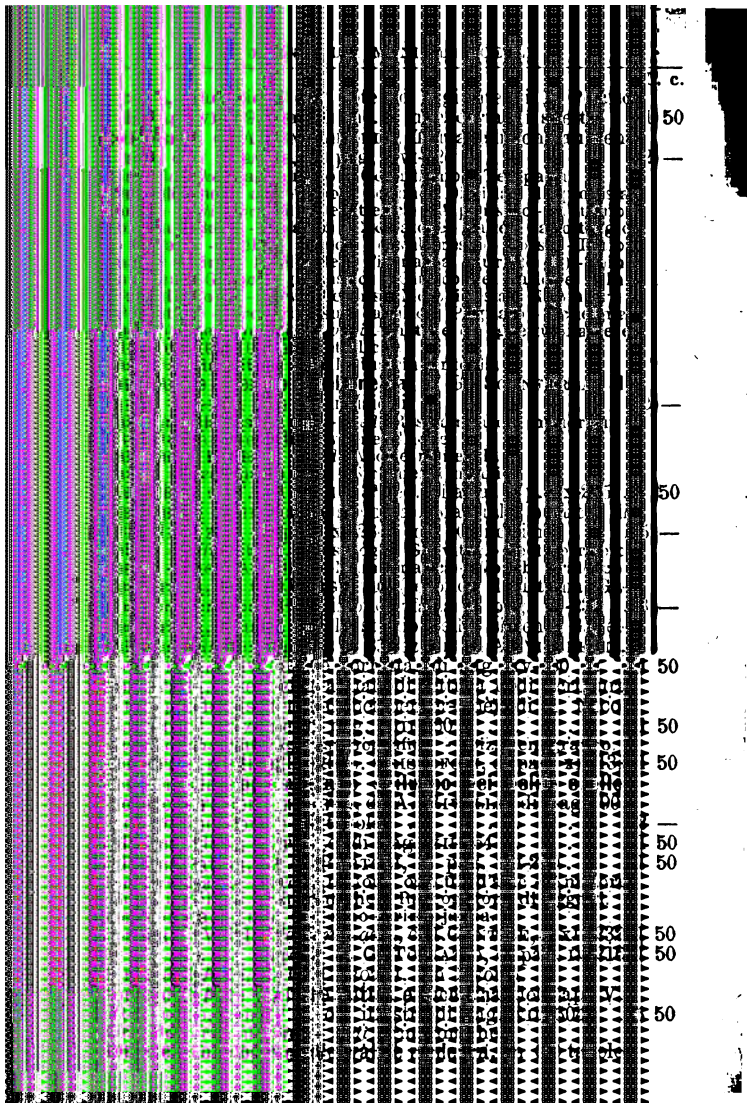
Specchi (Fabbricazioni degli) **e la decorazione del vetro e cristallo**, di R. NAMIAS, di p. XII-156 con 14 incis. . 2 —

— *vedi* Fotomaltografia - Vetro.

Speleologia. Studio delle caverne, C. CASELLI, p. XII-163 1 50

Spettrofotometria (La) applicata alla Chimica fisiologica, alla Clinica e alla Medicina legale, di G. GALLERANI, di pag. XIX-395, con 92 incisioni e tre tavole . . . 3 50

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni**, di R. A. PRO-

L. c.

sinottiche, di V. CASAGRANDI, 3ª edizione, con nuove correzioni ed aggiunte, di pagine VIII-254 . . . . 1 50

— *vedi* Cronologia universale.

Storia d'Europa, di E. A. FREEMAN. Edizione italiana per cura di A. GALANTE, di pagine XII-472. . . . 3 —

Storia della ginnastica — *vedi* Ginnastica.

Storia d'Italia (Breve), di P. ORSI, 3ª edizione riveduta di pagine XII-281 . . . . 1 50

Storia di Francia, dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-424. . . . . 3 —

Storia d'Inghilterra dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-367 . . . . 3 —

Storia — *vedi* Argentina - Astronomia nell'antico testamento - Commercio - Cristoforo Colombo - Cronologia - Dizionario biografico - Etnografia - Islamismo - Leggende - Manzoni - Mitologia - Omero - Rivoluzione francese - Shakespeare.

Storia Romana — *vedi* Antichità private - Antichità pubbliche - Topografia di Roma.

Storia della musica, di A. UNTERSTEINER, 2ª ediz. ampliata, di pag. XII-330. . . . . 3 —

Storia naturale — *vedi* Agraria - Acque minerali e term. - Anatomia e fisiologia comp. - Anatomia microscopica - Animali parass. uomo - Antropologia - Batteriologia - Biologia animale - Botanica - Coleotter - Cristallografia - Ditteri - Embriol. e morfologia gen. - Fisica cristallografica - Fisiologia - Geologia - Imenotteri ecc. - Insetti nocivi - Insetti utili - Ittiologia - Lepidotleri - Limnologia - Metalli preziosi - Mineralogia generale - Mineralogia descrittiva - Naturalista preparatore - Naturalista viaggiatore - Oceanografia - Ornitologia - Ostricoltura e mitilicoltura - Paleoetnologia - Paleontologia - Pietre preziose - Piscicoltura - Sismologia - Speleologia - Tecnica protistol. - Uccelli canori - Vulcanismo - Zoologia.

Strade ferrate (Le) in Italia. Regime legale economico ed amministrativo di F. TAJANI, di pag. VIII-265. . 2 50

Strumentazione, per E. PROUT, versione italiana con note di V. RICCI, 2ª ediz. di pag. XVI-314, 95 incis. 2 50

Strumenti ad arco (Gli) e la musica da camera, del Duca di CAFFARELLI, di pagine X-235 . . . . 2 50

— *vedi anche* Chitarra - Mandolinista - Pianista - Violino - Violoncello.

Strumenti metrici (Principî di statica e loro applicazione alla teoria e costruzione degli), di E. BAGNOLI, di pagine VIII-252, con 192 incisioni 3 50

Stufe — *vedi* Scaldamento.

Suini — *vedi* Majale - Razze bovine.

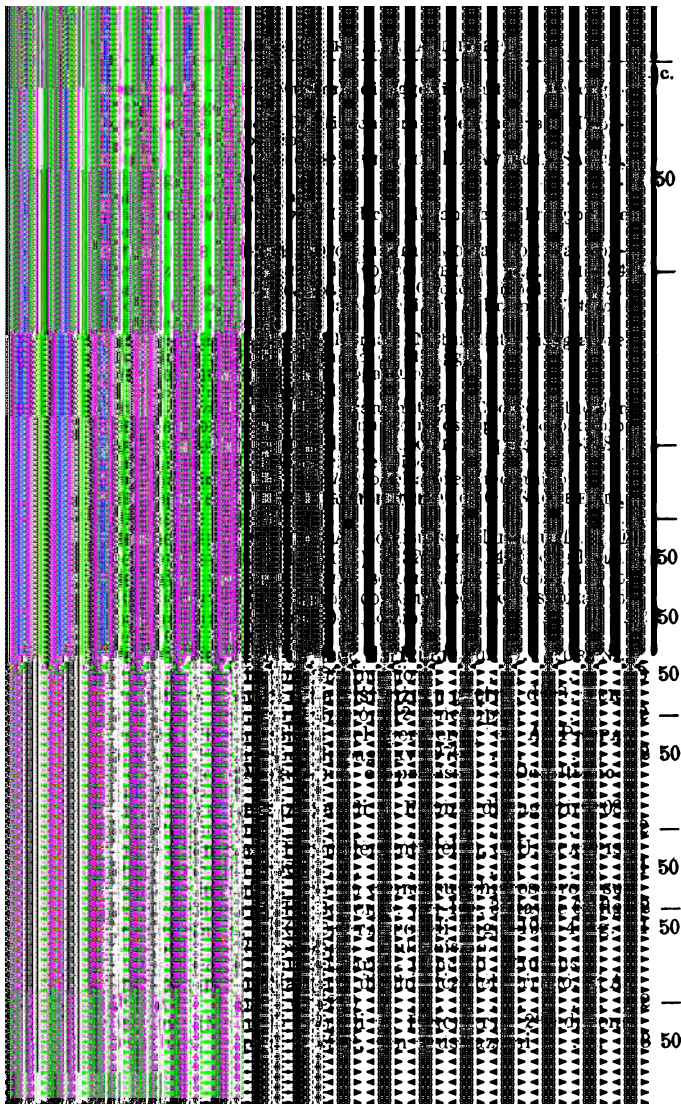
Suono — *vedi* Luce e suono

Succedanei — *vedi* Ricettario industriale - Imitazioni.

Sughero — *vedi* Imitazioni e succedanei.

Surrogati — *vedi* Ricettario industriale - Imitazioni.

Tabacco, di G. CANTONI, di pagine IV-176 con 6 inc. 2 —

L. c.

Tessuti di lana e di cotone (Analisi e fabbricazione dei). Manuale pratico razionale, di O. GIUDICI, di pagine XII-864 con 1098 incisioni colorate 16 50

Testamenti (Manuale dei), per cura di G. SERINA, 2ª edizione riveduta ed aumentata di pag. XV-312 . . 3 —

Tigré-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiani-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, di M. CAMPERIO, di p. 180 . 2 50

Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 4ª ediz. di pag. XVI-466, con 20 incisioni. . . . . 5 —

Tintoria — *vedi* Industria tintoria.

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pagine XVI-432 . . . . 5 —

Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. Compositori, Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pagine 280. . . . . 2 50

Tipografia (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di pagine VIII-271, corredato di figure e di modelli . . 2 50

— *vedi anche* Vocabolario tipografico.

Tisici e sanatorii (La cura razionale dei), di A. ZUBIANI, prefaz. di B. SILVA, pag. XLI-240, 4 inc. . . 2 —

Titoli di rendita — *vedi* Debito pubblico - Valori pubblici.

Topografia e rilievi — *vedi* Cartografia - Catasto - Celerimensura - Codice d. perito - Compensazioni errori - Curve - Disegno topografico - Estimo terreni - Estimo rurale - Fotogrammetria - Geometria pratica - Prospettiva - Regolo calcolatore - Telemetria - Triangolazioni.

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di pag. VIII-436, con 7 tavole 4 50

Torcitura della seta — *vedi* Filatura.

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, di S. DINARO, 3ª ediz., di pag. X-147 2 —

Tossicologia — *vedi* Analisi chimica - Chimica legale - Veleni.

Traduttore tedesco (Il), compendio delle principali difficoltà grammaticali della Lingua Tedesca, di R. MINUTTI, di pag. XVI-224 . . . . 1 50

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe vigenti, di A. G. BIANCHI, 2ª ediz. rifatta, p. XVI-208 2 —

Travi metallici composti — *vedi* Resistenza.

Trazione a vapore sulle ferrovie ordinarie, di G. OTTONE, di pag. LXVIII-469. . . . . 4 50

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, di O. JACOANGELI, Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pag. XIV-340, con 32 incisioni, 4 quadri, 32 modelli pei calcoli 7 50

Trigonometria piana (Esercizi ed applicazione di), con

L. c.

400 esercizi e problemi proposti da C. ALASIA, pag. XVI-292, con 30 incisioni 1 50

Trigonometria — *v.* Celerimensura - Geom. metr - Logaritmi.

Trigonometria della sfera — *vedi* Geom. e trigonom. della.

Trine (Le) **a fuselli in Italia.** Loro origine, discussione, confronti, cenni bibliografici, analisi, divisione, istruzioni tecnico-pratiche con 200 illustrazioni nel testo di GIACINTA ROMANELLI-MARONE, di pag. VIII-331 . 4 50

Tubercolosi (La) di M. VALTORTA e G. FANOLI, con prefazione del Prof. AUGUSTO MURRI, ed illustr. (In lav.).

— *vedi* Tisici.

Uccelli — *vedi* Ornitologia.

Uccelli canori (I nostri migliori). Loro caratteri e costumi. Modo di abituarli e conservarli in schiavitù. Cura delle loro infermità. Maniera per ottenere la produz. del Canarino, di L. UNTERSTEINER, p. XII-175 2 —

Ufficiale (Manuale dell') del Regio Esercito Italiano, di U. MORINI, di pag. XX-388 . . . . 3 50

Ufficiale sanitario (Manuale dell'), di C. TONZIG e G. RUATA (In lavoro).

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, di G. BERTOLINI, pag. X-124 . . . 2 50

Urina (L') nella diagnosi delle malattie. Trattato di chimica e microsc. clinica dell'urina, F. JORIO, p. XVI-216 2 —

Usciere — *vedi* Conciliatore.

Usi mercantili (Gli). Raccolta di tutti gli usi di piazza riconosciuti dalle Camere di Commercio ed Arti in Italia, di G. TRESPIOLI, di pag. XXXVI-696 . . . . 6 —

Uva spina — *vedi* Frutta minori.

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, di D. TAMARO, 3ª ediz., di pag. XVI-278, con tav. colorate, 7 fototipie e 57 incisioni . . . . 4 —

Valli lombarde — *vedi* Diz. alpino - Prealpi bergamasche.

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei), e per le operazioni di Borsa, di F. PICCINELLI, 2ª ed. rifatta e accresciuta, di pag. XXIV-902 . . . . . . 7 50

— *vedi* Debito pubblico - Società per azioni.

Valutazione — *vedi* Prontuario del ragioniere.

Vasellame antico - *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità.

Veleni ed avvelenamenti, di C. FERRARIS, di pagine XVI-208, con 20 incis. 2 50

Velocipedi — *vedi* Ciclista.

Ventagli artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità - Raccoglitore di oggetti minuti.

Ventilazione — *vedi* Scaldamento.

Verbi greci anomali (I), di P. SPAGNOTTI, secondo le Grammatiche di CURTIUS e INAMA, pag. XXIV-107 . 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. F. PAVANELLO, con indice alfabetico di dette forme, di pag. XVI-215 . . . . 1 50

Vermouth — *vedi* Liquorista.

L. c.

Vernici (Fabbricazione delle), **e prodotti affini, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche,** di U. FORNARI, 2ª ediz. ampliata di pag. XII-244 . . . . . 2 —

Veterinario (Manuale per il) di C. ROUX e V. LARI, di pag. XX-356, con 16 incis. 3 50

— *vedi* Araldica zootecnica - Cavallo - Igiene veterinaria Malattie infettive - Majale - Polizia sanitaria - Razze bovine - Zootecnia.

Vetri artistici — *vedi* Amatore oggetti d'arte - Specchi - Fotosmaltografia.

Vetro, (Il) Fabbricazione, lavorazione meccanica, applicazione alle costruzioni, alle arti ed alle industrie, di G. D'ANGELO, di pag. XIX-527, con 325 figure intercalate, delle quali 25 in tricromia 9 50

— *vedi* Fotosmaltografia - Specchi.

Vini bianchi da pasto e vini mezzo colore (Guida pratica per la fabbricazione, l'affinamento e la conservazione dei), di G. A. PRATO, pag. XII-276, 40 inc. 2 —

Vino (Il) di G. GRASSI-SONCINI, di pag. XVI-152 . . . 2 —

Vino aromatizzato — *vedi* Adulteraz - Cognac - Liquorista.

Violino (Storia del), **dei violinisti e della musica per violino,** di A. UNTERSTEINER, con una appendice di A. BONAVENTURA, di pag. VIII-228 . . . . 2 50

Violoncello (Il), **il violoncellista ed i violoncellisti,** di S. FORINO, di pag. XVII-444 . . . . 4 50

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticultori italiani, di O. OTTAVI. 6ª ed. riveduta ed ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XVI-232, con 30 inc. . . . . 2 —

— *vedi* Ampelografia - Enologia.

Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), di S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134. . . . . 1 50

Vocabolario araldico ad uso degli italiani, di G. GUELFI, di pag. VIII-294, con 356 incis. 3 50

Vocabolario compendioso della lingua russa, V. VOINOVICH, di pag. XVI-238 . . . . 3 —

Vocabolario tecnico illustrato nelle sei lingue: Italiana, Francese, Tedesca, Inglese, Spagnuola, Russa, sistema Deinhardt-Schlomann, diviso in volumi per ogni singolo ramo della tecnica industriale, compilato da Ingegneri speciali dei vari paesi con la collaborazione di numerosi stabilimenti industriali.

VOLUME I. Elementi di macchine e gli utensili più usuali per la lavorazione del legno e del metallo, in 16, di p. VIII-403, con 823 inc. e una *Prefazione* dell'Ing. Prof. G. COLOMBO. . 6 50

I volumi II. e seguenti sono in preparazione e comprenderanno le seguenti materie:

II. Impianti elettrici e trasmissioni di forze elettriche; macchine ed apparecchi elettrici, con un appendice ferrovie elettriche. — III. Caldaie e macchine a vapore. — IV. Macchine idrauliche (turbine, ruote ad acqua, pompe a stantuffo e centrifughe. — V. Elevatori e trasportatori. — VI. Utensile e macchine utensili. — VII. Ferrovie e costruzione di macchine ferroviarie. — VIII. Costruzioni in ferro e ponti. — IX. Metal-